Déterminer les complexes z tels que les points P, Q et R, d'affixes respectives 1, z et z^3, soient alignés.

Analyse

Comme P est d'affixe 1, on peut rapidement traiter le cas $z=1$. Ensuite, l'alignement peut être exprimé via la colinéarité de deux vecteurs.

Résolution

Pour $z=1$, les points P, Q et R ont même affixe. Ils sont confondus et donc alignés.

Supposons désormais $z \neq 1$.

Il vient alors :

$$\text{P, Q et R alignés} \Leftrightarrow \overrightarrow{\text{PQ}} \text{ et } \overrightarrow{\text{PR}} \text{ colinéaires} \Leftrightarrow \left(\overrightarrow{\text{PQ}}, \overrightarrow{\text{PR}}\right) = k\pi \text{ avec } k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \frac{z^3-1}{z-1} \in \mathbb{R}$$

Or, $z^3-1=(z-1)\left(z^2+z+1\right)$. On a donc :

$$\frac{z^3-1}{z-1} \in \mathbb{R} \Leftrightarrow z^2+z+1 \in \mathbb{R} \Leftrightarrow z^2+z \in \mathbb{R}$$

En posant $z=x+iy$, on a $z^2=x^2-y^2+2ixy$ puis :

$$z^2+z=x^2-y^2+x+2ixy+iy=x^2-y^2+x+iy(2x+1)$$

Ainsi, on a finalement :

$$\frac{z^3-1}{z-1} \in \mathbb{R} \Leftrightarrow y(2x+1)=0 \Leftrightarrow y=0 \text{ ou } 2x+1=0 \Leftrightarrow y=0 \text{ ou } x=\frac{-1}{2}$$

Pour $y=0$, on a z et z^3 dans $\mathbb{R}$. Les points P, Q et R appartiennent à l'axe des abscisses. Ils sont bien alignés.

On note que cette situation inclut le cas particulier correspondant à $z=1$.

Pour $x=\frac{-1}{2}$, on a : $z=-\frac{1}{2}+iy$.

Et donc : $z^2=\left(-\frac{1}{2}+iy\right)^2=\frac{1}{4}-y^2-iy$.

Puis :

$$\begin{aligned}
z^3=\left(-\frac{1}{2}+iy\right)^3&=\left(-\frac{1}{2}+iy\right)^2\times\left(-\frac{1}{2}+iy\right)\\
&=\left(\left(\frac{1}{4}-y^2\right)-iy\right)\times\left(-\frac{1}{2}+iy\right)\\
&=\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}-y^2\right)+y^2\right]+i\left[y\left(\frac{1}{4}-y^2\right)+\frac{1}{2}y\right]\\
&=\left(-\frac{1}{8}+\frac{3}{2}y^2\right)+i\left(\frac{3}{4}y-y^3\right)
\end{aligned}$$

On a donc : $\mathrm{P}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$, $\mathrm{Q}\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}\\y\end{pmatrix}$ et $\mathrm{R}\begin{pmatrix}-\frac{1}{8}+\frac{3}{2}y^2\\\frac{3}{4}y-y^3\end{pmatrix}$.

D'où : $\overrightarrow{\mathrm{PQ}}\begin{pmatrix}-\frac{3}{2}\\y\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{\mathrm{PR}}\begin{pmatrix}-\frac{1}{8}+\frac{3}{2}y^2-1\\\frac{3}{4}y-y^3\end{pmatrix}$, soit $\overrightarrow{\mathrm{PR}}\begin{pmatrix}-\frac{9}{8}+\frac{3}{2}y^2=-\frac{3}{2}\left(\frac{3}{4}-y^2\right)\\\frac{3}{4}y-y^3=y\left(\frac{3}{4}-y^2\right)\end{pmatrix}$.

Ainsi : $\overrightarrow{\mathrm{PR}}=\left(\frac{3}{4}-y^2\right)\overrightarrow{\mathrm{PQ}}$.

Les vecteurs $\overrightarrow{\mathrm{PQ}}$ et $\overrightarrow{\mathrm{PR}}$ sont bien colinéaires, les points P, Q et R sont bien alignés.

Résultat final

Les points P, Q et R du plan, d'affixes respectives 1, z et z^2 sont alignés si, et seulement si z est réel ou de la forme $-\frac{1}{2}+iy$, avec $y\in\mathbb{R}$.

Complément

A titre de complément, nous fournissons une représentation graphique (courbe rouge) de l'ensemble des points $\mathrm{R}\begin{pmatrix} -\frac{1}{8}+\frac{3}{2}t^2 \\ \frac{3}{4}t-t^3 \end{pmatrix}$. Une telle courbé est dite « paramétrée » (le paramètre étant, avec nos notations, le réel « *t* », ordonnée du point Q). Pour une valeur de *t*, nous avons fait apparaître le point R et le point $\mathrm{Q}\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ t \end{pmatrix}$ ainsi que la droite (QR) qui passe par le point P.