

Soit z un complexe de module 1, différent de -1 .

Montrer qu'il existe un unique réel α tel que : $z = \frac{1+i\alpha}{1-i\alpha}$.

Analyse

On dispose de l'égalité $z = \frac{1+i\alpha}{1-i\alpha}$ que l'on interprète comme une équation en « α » et que l'on résout dans un ensemble à préciser. Il convient alors de vérifier que la solution obtenue est réelle ...

Résolution

Soit z un complexe de module 1, différent de -1 .

On considère l'équation : $z = \frac{1+i\alpha}{1-i\alpha}$.

On doit avoir $1-i\alpha \neq 0$, soit $\alpha \neq \frac{1}{i} = -i$. On résout donc cette équation dans $\mathbb{C} \setminus \{-i\}$.

En raisonnant dans $\mathbb{C} \setminus \{-i\}$, il vient :

$$z = \frac{1+i\alpha}{1-i\alpha} \Leftrightarrow z(1-i\alpha) = 1+i\alpha \Leftrightarrow z - z i \alpha = 1+i\alpha \Leftrightarrow z-1 = i\alpha(z+1)$$

Puisque z est différent de -1 , on a :

$$z = \frac{1+i\alpha}{1-i\alpha} \Leftrightarrow z-1 = i\alpha(z+1) \Leftrightarrow i\alpha = \frac{z-1}{z+1} \Leftrightarrow \alpha = \frac{1}{i} \frac{z-1}{z+1} = -i \frac{z-1}{z+1} = i \frac{1-z}{1+z}$$

On note d'emblée que l'équation admet une solution unique.

Intéressons-nous maintenant au conjugué de $i \frac{1-z}{1+z}$:

$$\overline{\left(i \frac{1-z}{1+z} \right)} = \bar{i} \overline{\left(\frac{1-z}{1+z} \right)} = -i \frac{\overline{1-z}}{1+\bar{z}} = -i \frac{1-\bar{z}}{1+\bar{z}}$$

Le complexe z est non nul puisque son module est égal à 1.

On a alors, en tenant compte de $|z|^2 = 1 = z\bar{z}$:

$$\overline{\left(i \frac{1-z}{1+z}\right)} = -i \frac{1-\bar{z}}{1+\bar{z}} = -i \frac{z(1-\bar{z})}{z(1+\bar{z})} = -i \frac{z-z\bar{z}}{z+z\bar{z}} = -i \frac{z-1}{z+1} = i \frac{1-z}{1+z}$$

Ainsi, le complexe $i \frac{1-z}{1+z}$ est égal à son conjugué. Il s'agit d'un réel.

En définitive, l'équation $z = \frac{1+i\alpha}{1-i\alpha}$ admet une unique solution dans $\mathbb{C} \setminus \{-i\}$, il s'agit du réel

$$i \frac{1-z}{1+z}.$$

Résultat final

Pour tout complexe z de module 1, différent de -1 , il existe un unique réel α tel que :

$$z = \frac{1+i\alpha}{1-i\alpha}$$

c'est : $\alpha = i \frac{1-z}{1+z}$.