Déterminer tous les nombres complexes $z=x+iy$ (x et y réels) tels que $Z=\dfrac{-i\,\bar{z}}{z+i}$ soit un imaginaire pur.

Analyse

On peut transformer l'écriture de Z de façon à obtenir sa forme algébrique. On peut également obtenir directement la partie réelle de Z à l'aide de la conjugaison.

Résolution

En guise de préambule, notons que le complexe Z est défini si, et seulement si, $z+i\neq 0$, c'est-à-dire $z\neq -i$.

1ère approche : forme algébrique de Z

Avec $z=x+iy$, il vient :

$$
\begin{aligned}
Z&=\frac{-i\,\bar{z}}{z+i}=\frac{-i(x-iy)}{x+iy+i}=\frac{-y-ix}{x+i(1+y)}=-\frac{y+ix}{x+i(1+y)}=-\frac{(y+ix)\left[x-i(1+y)\right]}{\left[x+i(1+y)\right]\left[x-i(1+y)\right]}\\
&=-\frac{xy+x(1+y)+i\left[x^2-y(1+y)\right]}{x^2+(1+y)^2}=-\frac{x(2y+1)}{x^2+(1+y)^2}+i\frac{x^2-y(1+y)}{x^2+(1+y)^2}
\end{aligned}
$$

On a alors :

$$
Z\text{ imaginaire pur}\Leftrightarrow\begin{cases}\mathrm{Re}(Z)=0\\ z\neq -i\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x(2y+1)=0\\ z\neq -i\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=0\text{ ou }2y+1=0\\ z\neq -i\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=0\text{ ou }y=-\dfrac{1}{2}\\ z\neq -i\end{cases}
$$

Ainsi, Z sera un imaginaire pur si, et seulement si :

- Z est un imaginaire pur (cas $x=0$) différent de $-i$.
- Ou la partie imaginaire de z vaut $-\dfrac{1}{2}$.

2ème approche : résolution directe

On a :

$$Z \text{ imaginaire pur} \Leftrightarrow \begin{cases} \operatorname{Re}(Z)=0 \\ z \neq -i \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{2}\left(Z+\overline{Z}\right)=0 \\ z \neq -i \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} Z+\overline{Z}=0 \\ z \neq -i \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{-i\,\overline{z}}{z+i}+\overline{\left(\frac{-i\,\overline{z}}{z+i}\right)}=0 \\ z \neq -i \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{-i\,\overline{z}}{z+i}+\frac{\overline{-i\,\overline{z}}}{\overline{z+i}}=0 \\ z \neq -i \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{-i\,\overline{z}}{z+i}+\frac{i\,z}{\overline{z}-i}=0 \\ z \neq -i \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{-\overline{z}}{z+i}+\frac{z}{\overline{z}-i}=0 \\ z \neq -i \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{-\overline{z}\left(\overline{z}-i\right)+z\left(z+i\right)}{\left(z+i\right)\left(\overline{z}-i\right)}=0 \\ z \neq -i \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\overline{z}\left(\overline{z}-i\right)+z\left(z+i\right)=0 \\ z \neq -i \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -\overline{z}^2+i\,\overline{z}+z^2+iz=0 \\ z \neq -i \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\left(x-iy\right)^2+\left(x+iy\right)^2+i\left(x-iy\right)+i\left(x+iy\right)=0 \\ z \neq -i \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4ixy+2ix=0 \\ z \neq -i \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x\left(2y+1\right)=0 \\ z \neq -i \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\left(2y+1\right)=0 \\ z \neq -i \end{cases}$$

On retrouve les mêmes conditions que précédemment.

Résultat final

Le complexe $Z=\frac{-i\,\overline{z}}{z+i}$, avec $z=x+iy$ (x et y réels) est un imaginaire pur si, et seulement si, on a : $\operatorname{Re}(z)=x=0$ et $\operatorname{Im}(z)=y\neq -1$ ou $\operatorname{Im}(z)=y=-\frac{1}{2}$.