On considère l'équation : $3z^2-5z+5=0$ et on note z_1 et z_2 ses deux racines.

Sans calculer z_1 et z_2, déterminer le module des complexes suivants :

$$z_1+z_2,\ z_1z_2,\ z_1,\ z_2,\ \frac{1}{z_1}+\frac{1}{z_2} \text{ et } \frac{1}{1-z_1}+\frac{1}{1-z_2}$$

Analyse

A partir de l'équation proposée, on a facilement la somme et le produit des racines …
On n'oublie pas également que les racines complexes d'une équation du second degré à coefficients réels sont conjuguées.

Résolution

Rappelons que pour l'équation $az^2+bz+c=0$ (avec $a\neq 0$), la somme et le produit des racines, quel que soit le signe du discriminant, sont donnés par $-\frac{b}{a}$ et $\frac{c}{a}$.

On a donc ici : $z_1+z_2=-\frac{-5}{3}=\frac{5}{3}$ et $z_1z_2=\frac{5}{3}$.

On a donc immédiatement : $|z_1+z_2|=|z_1z_2|=\frac{5}{3}$.

L'équation étant à coefficients réels, on a : $z_2=\overline{z_1}$ et donc : $|z_2|=|\overline{z_1}|=|z_1|$.

D'où : $|z_1z_2|=\frac{5}{3}\Leftrightarrow|z_1|.|z_2|=\frac{5}{3}\Leftrightarrow|z_1|^2=\frac{5}{3}\Leftrightarrow|z_1|=\sqrt{\frac{5}{3}}$ (un module étant positif).

On a donc : $|z_1|=|z_2|=\sqrt{\frac{5}{3}}$.

On a : $\frac{1}{z_1}+\frac{1}{z_2}=\frac{z_1+z_2}{z_1z_2}=\frac{\frac{5}{3}}{\frac{5}{3}}=1$ et, de fait : $\left|\frac{1}{z_1}+\frac{1}{z_2}\right|=1$.

On a : $\dfrac{1}{1-z_1}+\dfrac{1}{1-z_2}=\dfrac{1-z_2+1-z_1}{(1-z_1)(1-z_2)}=\dfrac{2-(z_1+z_2)}{1-(z_1+z_2)+z_1z_2}=\dfrac{2-\frac{5}{3}}{1-\frac{5}{3}+\frac{5}{3}}=\dfrac{\frac{1}{3}}{1}=\dfrac{1}{3}$.

D'où, immédiatement : $\left|\dfrac{1}{1-z_1}+\dfrac{1}{1-z_2}\right|=\dfrac{1}{3}$.

Résultat final

En notant z_1 et z_2 les racines complexes de l'équation $3z^2-5z+5=0$, on a :

$$|z_1+z_2|=|z_1z_2|=\frac{5}{3},\ |z_1|=|z_2|=\sqrt{\frac{5}{3}},\ \left|\frac{1}{z_1}+\frac{1}{z_2}\right|=1 \text{ et } \left|\frac{1}{1-z_1}+\frac{1}{1-z_2}\right|=\frac{1}{3}.$$