Soit θ un réel

Déterminer le module et l'argument des complexes suivants :

$$z_1 = e^{e^{i\theta}} \qquad z_2 = e^{i\theta} + e^{2i\theta}$$

Analyse

Dans les deux cas, l'objectif est d'écrire le complexe proposé sous la forme $\rho e^{i\alpha}$ avec $\rho \geq 0$.
La deuxième situation requiert un peu de … prudence !

Résolution

On a immédiatement : $z_1 = e^{e^{i\theta}} = e^{\cos\theta + i\sin\theta} = e^{\cos\theta} \times e^{i\sin\theta}$ et donc :

$$|z_1| = \left|e^{\cos\theta} \times e^{i\sin\theta}\right| = \left|e^{\cos\theta}\right| \times \left|e^{i\sin\theta}\right| = e^{\cos\theta} \times 1 = e^{\cos\theta}$$

Par ailleurs : $\arg(z_1) = \arg\left(e^{\cos\theta} \times e^{i\sin\theta}\right) = \arg\left(e^{i\sin\theta}\right) = \sin\theta \, [2\pi]$.

Par ailleurs (en considérant classiquement la moyenne des exposants) :

$$z_2 = e^{i\theta} + e^{2i\theta} = e^{\frac{3i\theta}{2}}\left(e^{-\frac{i\theta}{2}} + e^{\frac{i\theta}{2}}\right) = 2\cos\frac{\theta}{2} \times e^{\frac{3i\theta}{2}}$$

On doit alors discuter suivant le signe de $\cos\frac{\theta}{2}$.

→ Si $\frac{\theta}{2} = \frac{\pi}{2} + k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$), c'est-à-dire si $\theta = \pi + 2k\pi = (2k+1)\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$).
Dans ce cas, on a $z_2 = 0$. Son module est nul et son argument n'est pas défini.

→ Si $-\frac{\pi}{2} + 2k\pi < \frac{\theta}{2} < \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$), c'est-à-dire si $-\pi + 4k\pi < \theta < \pi + 4k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$), soit encore $(4k-1)\pi < \theta < (4k+1)\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$).

Dans ce cas, on a $\cos\frac{\theta}{2} > 0$ d'où $|z_2| = \left|2\cos\frac{\theta}{2} \times e^{\frac{3i\theta}{2}}\right| = \left|2\cos\frac{\theta}{2}\right| \times \left|e^{\frac{3i\theta}{2}}\right| = 2\cos\frac{\theta}{2} \times 1 = 2\cos\frac{\theta}{2}$ et

$\arg(z_2) = \arg\left(2\cos\frac{\theta}{2} \times e^{\frac{3i\theta}{2}}\right) = \arg\left(e^{\frac{3i\theta}{2}}\right) = \frac{3\theta}{2} \, [2\pi]$.

→ Si $\frac{\pi}{2}+2k\pi<\frac{\theta}{2}<\frac{3\pi}{2}+2k\pi$ ($k\in\mathbb{Z}$), c'est-à-dire si $\pi+4k\pi<\theta<3\pi+4k\pi$ ($k\in\mathbb{Z}$), soit encore $(4k+1)\pi<\theta<(4k+3)\pi$ ($k\in\mathbb{Z}$).

Dans ce cas, on a $\cos\frac{\theta}{2}<0$ d'où :

$$|z_2|=\left|2\cos\frac{\theta}{2}\times e^{\frac{3i\theta}{2}}\right|=\left|-2\cos\frac{\theta}{2}\times\left(-e^{\frac{3i\theta}{2}}\right)\right|=\left|-2\cos\frac{\theta}{2}\right|\times\left|e^{i\pi}\times e^{\frac{3i\theta}{2}}\right|=2\left|\cos\frac{\theta}{2}\right|\times 1=2\left|\cos\frac{\theta}{2}\right|$$

et :

$$\arg(z_2)=\arg\left(2\cos\frac{\theta}{2}\times e^{\frac{3i\theta}{2}}\right)=\arg\left(-2\cos\frac{\theta}{2}\times -e^{\frac{3i\theta}{2}}\right)=\arg\left(-2\cos\frac{\theta}{2}\times e^{i\pi}\times e^{\frac{3i\theta}{2}}\right)$$

$$=\arg\left(-2\cos\frac{\theta}{2}\times e^{i\pi+\frac{3i\theta}{2}}\right)=\arg\left(e^{i\left(\frac{3\theta}{2}+\pi\right)}\right)=\frac{3\theta}{2}+\pi\ [2\pi]$$

Résultat final

$$|z_1|=e^{\cos\theta}\text{ et }\arg(z_1)=\sin\theta\ [2\pi]$$

Si $\theta=(2k+1)\pi$ ($k\in\mathbb{Z}$) :

$z_2=0$: module nul et argument non défini

Si $(4k-1)\pi<\theta<(4k+1)\pi$ ($k\in\mathbb{Z}$) :

$$|z_2|=2\cos\frac{\theta}{2}\text{ et }\arg(z_2)=\frac{3\theta}{2}\ [2\pi]$$

Si : $(4k+1)\pi<\theta<(4k+3)\pi$ ($k\in\mathbb{Z}$) :

$$|z_2|=2\left|\cos\frac{\theta}{2}\right|\text{ et }\arg(z_2)=\frac{3\theta}{2}+\pi\ [2\pi]$$