Déterminer l'ensemble des points du plan complexe dont l'affixe z vérifie :

$$\left|z+\frac{1}{z}\right|=2$$

Analyse

On doit assez rapidement manipuler la forme algébrique de z …

Résolution

On a :

$$\left|z+\frac{1}{z}\right|=2 \Leftrightarrow \left|z+\frac{1}{z}\right|^2=4 \Leftrightarrow \left(z+\frac{1}{z}\right)\times\overline{\left(z+\frac{1}{z}\right)}=4 \Leftrightarrow \left(z+\frac{1}{z}\right)\times\left(\overline{z}+\frac{1}{\overline{z}}\right)=4$$

$$\Leftrightarrow z\overline{z}+\frac{z}{\overline{z}}+\frac{\overline{z}}{z}+\frac{1}{z\overline{z}}=4 \Leftrightarrow |z|^2+\frac{1}{|z|^2}+\frac{z}{\overline{z}}+\overline{\left(\frac{z}{\overline{z}}\right)}=4 \Leftrightarrow |z|^2+\frac{1}{|z|^2}+2\,\mathrm{Re}\left(\frac{z}{\overline{z}}\right)=4$$

Posons alors $z=x+iy$.

On a immédiatement $|z|^2=x^2+y^2$.

Par ailleurs : $\frac{z}{\overline{z}}=\frac{z^2}{z\overline{z}}=\frac{(x+iy)^2}{|z|^2}=\frac{x^2-y^2+2ixy}{x^2+y^2}$. D'où : $\mathrm{Re}\left(\frac{z}{\overline{z}}\right)=\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$.

Finalement :

$$\left|z+\frac{1}{z}\right|=2 \Leftrightarrow |z|^2+\frac{1}{|z|^2}+2\,\mathrm{Re}\left(\frac{z}{\overline{z}}\right)=4 \Leftrightarrow x^2+y^2+\frac{1}{x^2+y^2}+2\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}=4$$

$$\Leftrightarrow \frac{\left(x^2+y^2\right)^2+1+2\left(x^2-y^2\right)}{x^2+y^2}=4 \Leftrightarrow \left(x^2+y^2\right)^2+1+2\left(x^2-y^2\right)=4\left(x^2+y^2\right)$$

$$\Leftrightarrow \left(x^2+y^2\right)^2-2x^2-6y^2+1=0 \Leftrightarrow \left(x^2+y^2\right)^2-2\left(x^2+y^2\right)+1=4y^2 \Leftrightarrow \left(x^2+y^2-1\right)^2=(2y)^2$$

$$\Leftrightarrow \left(x^2+y^2-1\right)^2-(2y)^2=0 \Leftrightarrow \left(x^2+y^2-2y-1\right)\left(x^2+y^2+2y-1\right)=0$$

$$\Leftrightarrow \left[x^2+(y-1)^2-2\right]\times\left[x^2+(y+1)^2-2\right]=0 \Leftrightarrow x^2+(y-1)^2-2=0 \text{ ou } x^2+(y+1)^2-2=0$$

$$\Leftrightarrow x^2+(y-1)^2=\sqrt{2}^2 \text{ ou } x^2+(y+1)^2=\sqrt{2}^2$$

On obtient ainsi deux équations de cercle : celle du cercle de centre $(0\,;1)$ et de rayon $\sqrt{2}$ et celle du cercle de centre $(0\,;-1)$ et de rayon $\sqrt{2}$ également.

Résultat final

Les points du plan complexe d'affixe z vérifiant $\left|z+\frac{1}{z}\right|=2$ sont les points des deux cercles de centres $(0\,;1)$ et $(0\,;-1)$ et de rayon $\sqrt{2}$.