Soit *a*, *b*, *c* et *d* quatre complexes vérifiant :

$$\begin{cases} a+c=b+d \\ a+ib=c+id \end{cases}$$

Montrer qu'il existe un complexe *z* tel que :

$$(z-a)^4=(z-b)^4=(z-c)^4=(z-d)^4$$

Analyse

On peut aborder le problème sous divers angles … Les deux égalités fournies sur *a*, *b*, *c* et *d* se prêtent à des interprétations géométriques simples et fructueuses.

Résolution

Soit A, B, C et D les points du plan complexe d'affixes respectives *a*, *b*, *c* et *d*.

L'égalité $a+c=b+d$ est équivalente à $\frac{a+c}{2}=\frac{b+d}{2}$. Ainsi, les segments $[\text{AC}]$ et $[\text{BD}]$ admettent le même milieu.

On peut commencer par distinguer le cas particulier où les points A et C sont confondus.
On a donc $a=c$. Dans ce cas, la deuxième égalité nous donne immédiatement $b=d$.
Mais alors la première égalité se récrit : $2a=2b$ et il vient finalement : $a=b=c=d$.
Les points A, B, C et D sont confondus.
L'égalité $(z-a)^4=(z-b)^4=(z-c)^4=(z-d)^4$ est alors vérifiée pour tout complexe *z*.

On note qu'en partant de « l'autre » situation particulière, à savoir les points B et D sont confondus, on est ramené à la situation que l'on vient de traiter.

On suppose donc désormais que les segments $[\text{AC}]$ et $[\text{BD}]$ sont tous les deux de longueur non nulle.

Supposons alors que les points A et B (ou A et D) soient confondus.
On a donc $a=b$. La première égalité se récrit alors : $c=d$ et la deuxième égalité nous donne $a=c$. En définitive : $a=b=c=d$. On est ramené aux cas précédents.

Les deux égalités correspondent donc à deux situations :

- Soit les points A, B, C et D sont confondus. Dans ce cas tout complexe z vérifie l'égalité $(z-a)^4=(z-b)^4=(z-c)^4=(z-d)^4$.
- Soit les points A, B, C et D sont deux à deux distincts.

Traitons maintenant cette deuxième situation.

Les segments $[\mathrm{AC}]$ et $[\mathrm{BD}]$ admettant le même milieu, on en déduit immédiatement que le quadrilatère ABCD est un parallélogramme.

La deuxième égalité se récrit : $a-c=i(d-b)=e^{i\frac{\pi}{2}}\times(d-b)$.
En d'autres termes, le vecteur $\overrightarrow{\mathrm{CA}}$ est l'image du vecteur $\overrightarrow{\mathrm{BD}}$ par la rotation vectorielle d'angle de mesure $\frac{\pi}{2}$.
Comme $\|\overrightarrow{\mathrm{CA}}\|=\|\overrightarrow{\mathrm{BD}}\|$, les diagonales du parallélogramme sont de même longueur. Nous avons donc affaire à un rectangle.
Enfin, comme les droites (AC) et (BD) sont perpendiculaires, le rectangle ABCD est en fait un carré.

Notons alors Ω le centre du carré ABCD, c'est-à-dire le milieu des segments $[\mathrm{AC}]$ et $[\mathrm{BD}]$. Notons ω son affixe.

On a bien sûr : $\omega=\frac{a+c}{2}=\frac{b+d}{2}$ et donc : $\omega-a=-(\omega-c)$ et $\omega-b=-(\omega-d)$ (ces égalités correspondent simplement aux égalités vectorielles $\overrightarrow{\mathrm{A\Omega}}=-\overrightarrow{\mathrm{C\Omega}}$ et $\overrightarrow{\mathrm{B\Omega}}=-\overrightarrow{\mathrm{D\Omega}}$).
On a aussi : $a-c=i(d-b)\Leftrightarrow 2(\omega-c)=2i(d-\omega)\Leftrightarrow \omega-c=-i(\omega-d)$ (ce qui revient simplement à dire que le vecteur $\overrightarrow{\mathrm{C\Omega}}$ est l'image du vecteur $\overrightarrow{\mathrm{D\Omega}}$ par la rotation vectorielle d'angle de mesure $\frac{\pi}{2}$).

Des égalités $\omega-a=-(\omega-c)$, $\omega-b=-(\omega-d)$ et $\omega-c=-i(\omega-d)$, on tire facilement :

$$\omega-a=-i(\omega-b)=-(\omega-c)=i(\omega-d)$$

On en tire alors immédiatement : $(\omega-a)^4=(\omega-b)^4=(\omega-c)^4=(\omega-d)^4$.

Il s'agit de la seule solution !

En effet, de l'égalité $(z-a)^4=(z-b)^4=(z-c)^4=(z-d)^4$, on tire facilement :

$$|z-a|=|z-b|=|z-c|=|z-d|$$

Ainsi, le point M d'affixe z est-il équidistant des points A, B, C et D. En d'autres termes, le point M est le point d'intersection des médiatrices des côtés du carré ABCD. Il s'agit donc du centre du carré.

Bien sûr, on peut adopter une approche plus algébrique …

La multi-égalité $(z-a)^4=(z-b)^4=(z-c)^4=(z-d)^4$ conduit à exploiter plusieurs égalités.

Considérons par exemple la première : $(z-a)^4=(z-b)^4$.

On a facilement :

$$\begin{aligned}
&(z-a)^4=(z-b)^4\\
&\Leftrightarrow (z-a)^4-(z-b)^4=0\\
&\Leftrightarrow \left[(z-a)^2-(z-b)^2\right]\times\left[(z-a)^2+(z-b)^2\right]=0\\
&\Leftrightarrow (b-a)\times(2z-a-b)\times\left[(z-a)^2+(z-b)^2\right]=0\\
&\Leftrightarrow (b-a)\times\left(z-\frac{a+b}{2}\right)\times\left[2z^2-2(a+b)z+a^2+b^2\right]=0\\
&\Leftrightarrow (b-a)\times\left(z-\frac{a+b}{2}\right)\times\left(z-\frac{a+b+i(a-b)}{2}\right)\times\left(z-\frac{a+b-i(a-b)}{2}\right)=0
\end{aligned}$$

Une telle équation fournie ainsi plusieurs possibilités :

- Les affixes a et b sont égales (points A et B confondus).
- Le point M d'affixe z est le milieu I des points A et B ($z=\frac{a+b}{2}$).
- Le point M d'affixe z est tel que le vecteur $\overrightarrow{\text{IM}}$ est l'image du vecteur $\frac{1}{2}\overrightarrow{\text{BA}}$ par la rotation vectorielle d'angle $\frac{\pi}{2}$ (respectivement $-\frac{\pi}{2}$) car $z-\frac{a+b+i(a-b)}{2}=0$ équivaut à : $z-\frac{a+b}{2}=i\times\frac{1}{2}(a-b)$.

On aboutira mais … l'interprétation géométrique des deux relations vérifiées par les quatre complexes me semble être une approche plus … efficace et élégante. Non ?

Résultat final

Si a, b, c et d sont quatre complexes vérifiant :

$$\begin{cases} a+c=b+d \\ a+ib=c+id \end{cases}$$

alors il existe un complexe z vérifiant :

$$(z-a)^4=(z-b)^4=(z-c)^4=(z-d)^4$$

Si les quatre complexes sont deux à deux distincts, alors le complexe z est unique, comme affixe du centre du carré de sommets A, B, C et D, d'affixes a, b, c et d.