

Soit u et v deux complexes.

1. Montrer que :

$$|u+v|^2 + |u-v|^2 = 2(|u|^2 + |v|^2)$$

2. On pose $m = \frac{u+v}{2}$ et on note μ une racine carrée de uv .

Montrer que :

$$|u| + |v| = |m + \mu| + |m - \mu|$$

Analyse

Deux égalités classiques que l'on obtient en comparant les carrés.

Résolution

Question 1.

On a :

$$|u+v|^2 = (u+v)\overline{(u+v)} = (u+v)(\bar{u} + \bar{v}) = u\bar{u} + v\bar{v} + u\bar{v} + \bar{u}v = |u|^2 + |v|^2 + u\bar{v} + \bar{u}v$$

De façon similaire, on a : $|u-v|^2 = |u|^2 + |v|^2 - u\bar{v} - \bar{u}v$.

En sommant membre à membre les deux égalités précédentes, on obtient immédiatement :

$$|u+v|^2 + |u-v|^2 = 2|u|^2 + 2|v|^2 = 2(|u|^2 + |v|^2)$$

L'égalité est établie.

$$\forall (u, v) \in \mathbb{C}^2, |u+v|^2 + |u-v|^2 = 2(|u|^2 + |v|^2)$$

Il s'agit de l'égalité du parallélogramme.

Si u et v désignent les affixes de deux côtés consécutifs (en tant que vecteurs) d'un parallélogramme du plan alors $u+v$ et $u-v$ sont les affixes de deux diagonales et l'égalité

traduit le fait que la somme des carrés des longueurs des deux diagonales d'un parallélogramme est égale à la somme des carrés des longueurs de ses côtés. Cette propriété du parallélogramme est connue depuis l'antiquité.

Question 2.

On a : $\mu^2 = uv$.

Les expressions à comparer étant des réels positifs, nous pouvons comparer leurs carrés.

On a d'abord :

$$(|u| + |v|)^2 = |u|^2 + |v|^2 + 2|u||v| = |u|^2 + |v|^2 + 2|uv| = |u|^2 + |v|^2 + 2|\mu^2| = |u|^2 + |v|^2 + 2|\mu|^2$$

Puis :

$$\begin{aligned} (|m + \mu| + |m - \mu|)^2 &= \underbrace{|m + \mu|^2 + |m - \mu|^2}_{\substack{\text{On utilise le résultat} \\ \text{de la première question.}}} + 2|m + \mu||m - \mu| \\ &= 2(|m|^2 + |\mu|^2) + 2|(m + \mu)(m - \mu)| = 2\left|\frac{u+v}{2}\right|^2 + 2|\mu|^2 + 2|m^2 - \mu^2| \\ &= \frac{1}{2}|u+v|^2 + 2|\mu|^2 + 2\left|\left(\frac{u+v}{2}\right)^2 - uv\right| = \frac{1}{2}|u+v|^2 + 2|\mu|^2 + 2\left|\frac{(u+v)^2}{4} - uv\right| \\ &= \frac{1}{2}|u+v|^2 + 2|\mu|^2 + \frac{1}{2}|(u+v)^2 - 4uv| = \frac{1}{2}|u+v|^2 + 2|\mu|^2 + \frac{1}{2}|(u-v)^2| \\ &= \frac{1}{2}(|u+v|^2 + |u-v|^2) + 2|\mu|^2 = \frac{1}{2} \times 2(|u|^2 + |v|^2) + 2|\mu|^2 \\ &\quad \substack{\text{On utilise le résultat} \\ \text{de la première question.}} \\ &= |u|^2 + |v|^2 + 2|\mu|^2 \end{aligned}$$

On a bien $(|u| + |v|)^2 = (|m + \mu| + |m - \mu|)^2$ et, finalement : $|u| + |v| = |m + \mu| + |m - \mu|$.

Pour tous complexes u et v , en posant $m = \frac{u+v}{2}$ et $\mu^2 = uv$, on a :

$$|u| + |v| = |m + \mu| + |m - \mu|$$