

Soit la fonction polynomiale P définie sur \mathbb{C} par :

$$P(z) = z^4 - 6z^3 + 14z^2 - 6z + 13$$

1. Calculer $P(i)$ et $P(-i)$.
2. Pour tout complexe z , on a l'égalité : $P(z) = (z^2 + 1)Q(z)$ où $Q(z) = z^2 + cz + d$.
Déterminer les valeurs des réels c et d .
3. Résoudre l'équation $Q(z) = 0$.
Résoudre alors l'équation $P(z) = 0$.

Analyse

Une résolution dans \mathbb{C} d'une équation du quatrième degré à coefficients réels. La résolution est (bien sûr) accompagnée et se ramène à des calculs simples (première question), une factorisation (deuxième question) et la résolution d'une équation du second degré (toujours à coefficients réels...).

Résolution

Question 1.

$$\begin{aligned} P(i) &= i^4 - 6 \times i^3 + 14 \times i^2 - 6 \times i + 13 \\ &= 1 - 6 \times (-i) - 14 - 6i + 13 \\ &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(-i) &= (-i)^4 - 6 \times (-i)^3 + 14 \times (-i)^2 - 6 \times (-i) + 13 \\ &= 1 - 6 \times i - 14 + 6i + 13 \\ &= 0 \end{aligned}$$

$$P(i) = P(-i) = 0$$

Question 2.

D'après la question précédente, les complexes i et $-i$ sont deux racines complexes de P . D'où la factorisation par $(z-i)(z+i) = z^2 + 1$.

$$\begin{aligned} \forall z \in \mathbb{C}, P(z) &= z^4 - 6z^3 + 14z^2 - 6z + 13 = (z^2 + 1)(z^2 + cz + d) \\ \Leftrightarrow \forall z \in \mathbb{C}, P(z) &= z^4 - 6z^3 + 14z^2 - 6z + 13 = z^4 + cz^3 + (d+1)z^2 + cz + d \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} c = -6 \\ d + 1 = 14 \\ c = -6 \\ d = 13 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} c = -6 \\ d = 13 \end{cases}$$

$$\forall z \in \mathbb{C}, P(z) = z^4 - 6z^3 + 14z^2 - 6z + 13 = (z^2 + 1)(z^2 - 6z + 13)$$

Question 3.

On doit résoudre : $Q(z) = z^2 - 6z + 13 = 0$.

Le discriminant associé à cette équation s'écrit : $\Delta = (-6)^2 - 4 \times 1 \times 13 = 36 - 52 = -16$.

L'équation $Q(z) = 0$ admet donc les deux solutions complexes conjuguées :

$$z_1 = \frac{6-4i}{2} = 3-2i \text{ et } z_2 = \overline{z_1} = 3+2i$$

L'équation $Q(z) = z^2 - 6z + 13 = 0$ admet pour solutions $3+2i$ et $3-2i$.

On a : $P(z) = 0 \Leftrightarrow (z^2 + 1)Q(z) = 0 \Leftrightarrow z^2 + 1 = 0$ ou $Q(z) = 0$.

D'après les questions précédentes, il vient :

L'équation $P(z) = z^4 - 6z^3 + 14z^2 - 6z + 13 = 0$ admet pour solutions :
 $i, -i, 3+2i$ et $3-2i$.