Déterminer :

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{x-\sin(2x)}{x+\sin(3x)}\right)$$

Analyse

Comme nous avons : $\lim_{x\to 0}\left(x-\sin(2x)\right)=0$ et $\lim_{x\to 0}\left(x+\sin(3x)\right)=0$, nous sommes confrontés à une forme indéterminée du type « $\frac{0}{0}$ ». L'idée consiste ici à faire apparaître une limite connue du type « $\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin(\alpha x)}{\alpha x}\right)$ » dont on sait (voir le cours) qu'elle vaut 1.

Résolution

Nous allons donc considérer la fonction *f* définie par : $f(x)=\frac{x-\sin(2x)}{x+\sin(3x)}$.

Pour *x* non nul, on a, en mettant *x* en facteur au numérateur et au dénominateur :

$$f(x)=\frac{x-\sin(2x)}{x+\sin(3x)}=\frac{x\left(1-\frac{\sin(2x)}{x}\right)}{x\left(1+\frac{\sin(3x)}{x}\right)}=\frac{1-2\frac{\sin(2x)}{2x}}{1+3\frac{\sin(3x)}{3x}}$$

Comme on a : $\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin(2x)}{2x}\right)=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin(3x)}{3x}\right)=1$, il vient finalement : $\lim_{x\to 0} f(x)=\frac{1-2}{1+3}=-\frac{1}{4}$.

Résultat final

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{x-\sin(2x)}{x+\sin(3x)}\right)=-\frac{1}{4}$$