Déterminer :

$$\lim_{x\to 1}\left((1-x)\tan\left(\frac{\pi x}{2}\right)\right)$$

Analyse

Comme nous avons : $\lim_{x\to 1}\left|\tan\left(\frac{\pi x}{2}\right)\right| = +\infty$ et $\lim_{x\to 1}(1-x) = 0$, nous sommes confrontés à une forme indéterminée du type « $0\times\infty$ ». L'idée consiste ici à faire apparaître une limite connue en 0 après avoir posé $x = 1+h$.

Résolution

Nous allons donc considérer la fonction *f* définie par : $f(x) = (1-x)\tan\left(\frac{\pi x}{2}\right)$.

Posons donc : $x = 1+h$. On aura alors : $\lim_{x\to 1} f(x) = \lim_{h\to 0} f(1+h)$.

On a :

$$f(x) = f(1+h) = (1-(1+h))\tan\left(\frac{\pi(1+h)}{2}\right) = -h\tan\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi h}{2}\right)$$

Or : $\tan\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi h}{2}\right) = \dfrac{\sin\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi h}{2}\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi h}{2}\right)} = \dfrac{\cos\left(\frac{\pi h}{2}\right)}{-\sin\left(\frac{\pi h}{2}\right)}$.

Il vient alors :

$$f(1+h) = -h\tan\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi h}{2}\right) = -h\frac{\cos\left(\frac{\pi h}{2}\right)}{\left(-\sin\left(\frac{\pi h}{2}\right)\right)} = \cos\left(\frac{\pi h}{2}\right)\frac{h}{\sin\left(\frac{\pi h}{2}\right)} = \frac{2}{\pi}\cos\left(\frac{\pi h}{2}\right)\frac{\frac{\pi h}{2}}{\sin\left(\frac{\pi h}{2}\right)}$$

Or : $\lim_{h\to 0}\left(\frac{\sin\left(\frac{\pi h}{2}\right)}{\frac{\pi h}{2}}\right)=\lim_{h\to 0}\left(\frac{\frac{\pi h}{2}}{\sin\left(\frac{\pi h}{2}\right)}\right)=1$ et $\lim_{h\to 0}\cos\left(\frac{\pi h}{2}\right)=\cos(0)=1$, d'où, finalement :

$$\lim_{h\to 0} f(1+h)=\lim_{h\to 0}\left(\frac{2}{\pi}\cos\left(\frac{\pi h}{2}\right)\frac{\frac{\pi h}{2}}{\sin\left(\frac{\pi h}{2}\right)}\right)=\frac{2}{\pi}$$

C'est à dire : $\lim_{x\to 1} f(x)=\frac{2}{\pi}$.

Résultat final

$$\lim_{x\to 1}\left((1-x)\tan\left(\frac{\pi x}{2}\right)\right)=\frac{2}{\pi}$$