Déterminer :

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x+a}-\sqrt{x}\right) \text{ où } a\in\mathbb{R}^*$$

Analyse

Comme nous avons : $\forall a\in\mathbb{R}^*, \lim_{x\to+\infty}\sqrt{x+a} = \lim_{x\to+\infty}\sqrt{x} = +\infty$, nous sommes confrontés à une forme indéterminée du type « $\infty-\infty$ ». L'idée consiste ici à transformer la différence $\sqrt{x+a}-\sqrt{x}$ en utilisant l'expression conjuguée.

Résolution

Nous allons donc considérer la fonction f_a définie par : $f_a(x)=\sqrt{x+a}-\sqrt{x}$.

En utilisant l'expression conjuguée de $\sqrt{x+a}-\sqrt{x}$, il vient :

$$f_a(x)=\sqrt{x+a}-\sqrt{x}=\frac{\left(\sqrt{x+a}-\sqrt{x}\right)\left(\sqrt{x+a}+\sqrt{x}\right)}{\sqrt{x+a}+\sqrt{x}}=\frac{(x+a)-x}{\sqrt{x+a}+\sqrt{x}}=\frac{a}{\sqrt{x+a}+\sqrt{x}}$$

Comme : $\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x+a}+\sqrt{x}\right)=+\infty$, on a finalement : $\forall a\in\mathbb{R}^*, \lim_{x\to+\infty} f_a(x)=0$.

Résultat final

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x+a}-\sqrt{x}\right)=0$$