Déterminer :

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x(x+a)}-x\right) \text{ où } a\in\mathbb{R}^*$$

Analyse

Comme nous avons : $\forall a\in\mathbb{R}^*, \lim_{x\to+\infty}\sqrt{x(x+a)} = \lim_{x\to+\infty} x = +\infty$, nous sommes confrontés à une forme indéterminée du type « $\infty-\infty$ ». L'idée consiste ici à transformer la différence $\sqrt{x(x+a)}-x$ en utilisant l'expression conjuguée.

Résolution

Nous allons donc considérer la fonction f_a définie par : $f_a(x)=\sqrt{x(x+a)}-x$.

En utilisant l'expression conjuguée de $\sqrt{x(x+a)}-x$, il vient :

$$\begin{aligned}
f_a(x)=\sqrt{x(x+a)}-x &= \frac{\left(\sqrt{x(x+a)}-x\right)\left(\sqrt{x(x+a)}+x\right)}{\sqrt{x(x+a)}+x}\\
&=\frac{x(x+a)-x^2}{\sqrt{x(x+a)}+x}=\frac{ax}{x\sqrt{1+\frac{a}{x}}+x}=\frac{ax}{x\left(\sqrt{1+\frac{a}{x}}+1\right)}=\frac{a}{\sqrt{1+\frac{a}{x}}+1}
\end{aligned}$$

Comme : $\forall a\in\mathbb{R}^*, \lim_{x\to+\infty}\sqrt{1+\frac{a}{x}}=1$, on a finalement : $\forall a\in\mathbb{R}^*, \lim_{x\to+\infty} f_a(x)=\frac{a}{2}$.

Résultat final

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x(x+a)}-x\right)=\frac{a}{2}$$