Déterminer :

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1-\sqrt{\cos x}}{x^2}\right)$$

Analyse

Comme nous avons : $\lim_{x\to 0}\cos x=\cos(0)=1$, nous sommes confrontés à une forme indéterminée du type « $\frac{0}{0}$ ». L'idée consiste ici, pour lever l'indétermination, à utiliser l'expression conjuguée de $1-\sqrt{\cos x}$, à savoir : $1+\sqrt{\cos x}$.

Résolution

Nous allons donc considérer la fonction f définie par : $f(x)=\frac{1-\sqrt{\cos x}}{x^2}$.

On a :

$$f(x)=\frac{1-\sqrt{\cos x}}{x^2}=\frac{\left(1-\sqrt{\cos x}\right)\left(1+\sqrt{\cos x}\right)}{x^2\left(1+\sqrt{\cos x}\right)}=\frac{1-\cos x}{x^2\left(1+\sqrt{\cos x}\right)}$$

Or : $1-\cos x=2\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)$. Il vient donc :

$$f(x)=\frac{1-\cos x}{x^2\left(1+\sqrt{\cos x}\right)}=\frac{2\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}{x^2\left(1+\sqrt{\cos x}\right)}=\frac{2\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}{4\left(1+\sqrt{\cos x}\right)\left(\frac{x}{2}\right)^2}=\frac{1}{2\left(1+\sqrt{\cos x}\right)}\left(\frac{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}{\frac{x}{2}}\right)^2$$

Or : $\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}{\frac{x}{2}}\right)=1$ et $\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{2\left(1+\sqrt{\cos x}\right)}\right)=\frac{1}{4}$.

D'où, finalement : $\lim_{x\to 0}f(x)=\frac{1}{4}$.

Résultat final

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1-\sqrt{\cos x}}{x^2}\right)=\frac{1}{4}$$