Déterminer :

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{3}}\left(\frac{1-2\cos(x)}{\pi-3x}\right)$$

Analyse

Comme nous avons $\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)=\frac{1}{2}$, il vient : $\lim_{x\to\frac{\pi}{3}}\left(1-2\cos(x)\right)=0$. Par ailleurs, on a clairement : $\lim_{x\to\frac{\pi}{3}}\left(\pi-3x\right)=0$. Nous sommes confrontés à une forme indéterminée du type « $\frac{0}{0}$ ». L'idée consiste ici à faire apparaître une limite connue en 0 en posant $x=\frac{\pi}{3}+h$.

Résolution

Nous allons donc considérer la fonction *f* définie par : $f(x)=\frac{1-2\cos x}{\pi-3x}$.

Posons : $x=\frac{\pi}{3}+h$. On a alors : $\lim_{x\to\frac{\pi}{3}} f(x)=\lim_{h\to 0} f\left(\frac{\pi}{3}+h\right)$.

On a :

$$\begin{aligned}
f\left(\frac{\pi}{3}+h\right) &= \frac{1-2\cos\left(\frac{\pi}{3}+h\right)}{\pi-3\left(\frac{\pi}{3}+h\right)} \\
&= \frac{1-2\left(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)\cos h-\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\sin h\right)}{-3h} \\
&= \frac{1-2\left(\frac{1}{2}\cos h-\frac{\sqrt{3}}{2}\sin h\right)}{-3h} \\
&= \frac{1-\cos h+\sqrt{3}\sin h}{-3h}
\end{aligned}$$

En utilisant $1-\cos h = 2\sin^2\left(\frac{h}{2}\right)$, on obtient alors :

$$\begin{aligned}
f\left(\frac{\pi}{3}+h\right) &= \frac{1-\cos h+\sqrt{3}\sin h}{-3h} \\
&= \frac{2\sin^2\left(\frac{h}{2}\right)+\sqrt{3}\sin h}{-3h} \\
&= -\frac{2h}{3}\frac{\sin^2\left(\frac{h}{2}\right)}{h^2}-\frac{\sqrt{3}}{3}\frac{\sin h}{h} \\
&= -\frac{h}{6}\frac{\sin^2\left(\frac{h}{2}\right)}{\left(\frac{h}{2}\right)^2}-\frac{1}{\sqrt{3}}\frac{\sin h}{h} \\
&= -\frac{h}{6}\left(\frac{\sin\left(\frac{h}{2}\right)}{\frac{h}{2}}\right)^2-\frac{1}{\sqrt{3}}\frac{\sin h}{h}
\end{aligned}$$

De $\lim_{h\to 0}\left(\frac{\sin\left(\frac{h}{2}\right)}{\frac{h}{2}}\right)=1$, on tire : $\lim_{h\to 0}\left(-\frac{h}{6}\left(\frac{\sin\left(\frac{h}{2}\right)}{\frac{h}{2}}\right)^2\right)=0$.

D'où, finalement : $\lim_{h\to 0} f\left(\frac{\pi}{3}+h\right)=-\frac{1}{\sqrt{3}}$.

Résultat final

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{3}}\left(\frac{1-2\cos x}{\pi-3x}\right)=-\frac{1}{\sqrt{3}}$$