Déterminer :

$$\lim_{x\to -2}\left(\frac{\tan(\pi x)}{x+2}\right)$$

Analyse

Comme nous avons : $\lim_{x\to -2}\tan(\pi x)=\tan(-2\pi)=\tan(0)=0$ et $\lim_{x\to -2}(x+2)=0$, nous sommes confrontés à une forme indéterminée du type « $\frac{0}{0}$ ». L'idée consiste ici à faire apparaître une limite connue en 0 après avoir posé $x=h-2$.

Résolution

Nous allons donc considérer la fonction f définie par : $f(x)=\frac{\tan(\pi x)}{x+2}$.

Posons : $x=h-2$. On aura alors : $\lim_{x\to -2} f(x)=\lim_{h\to 0} f(h-2)$.

On a :

$$f(h-2)=\frac{\tan(\pi(h-2))}{(h-2)+2}=\frac{\tan(\pi h-2\pi)}{h}=\frac{\tan(\pi h)}{h}=\frac{1}{\cos(\pi h)}\frac{\sin(\pi h)}{h}=\frac{\pi}{\cos(\pi h)}\frac{\sin(\pi h)}{\pi h}$$

Or : $\lim_{h\to 0}\left(\frac{\sin(\pi h)}{\pi h}\right)=1$ et $\lim_{h\to 0}\cos(\pi h)=\cos(0)=1$.

Il vient finalement : $\lim_{h\to 0} f(h-2)=\pi$. Soit : $\lim_{x\to -2} f(x)=\pi$.

Résultat final

$$\lim_{x\to -2}\left(\frac{\tan(\pi x)}{x+2}\right)=\pi$$