

Déterminer :

$$\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{\cos\left(\frac{\pi x}{2}\right)}{1 - \sqrt{x}} \right)$$

Analyse

Comme nous avons : $\lim_{x \rightarrow 1} \cos\left(\frac{\pi x}{2}\right) = 0$ et $\lim_{x \rightarrow 1} (1 - \sqrt{x}) = 0$, nous sommes confrontés à une forme indéterminée du type « $\frac{0}{0}$ ». L'idée consiste ici à utiliser d'abord l'expression conjuguée de $1 - \sqrt{x}$, à savoir $1 + \sqrt{x}$, pour s'affranchir du radical au dénominateur, puis à faire apparaître une limite connue en 0 après avoir posé $x = 1 + h$.

Résolution

Nous allons donc considérer la fonction f définie par : $f(x) = \frac{\cos\left(\frac{\pi x}{2}\right)}{1 - \sqrt{x}}$.

Dans un premier temps, nous récrivons f comme suit :

$$f(x) = \frac{\cos\left(\frac{\pi x}{2}\right)}{1 - \sqrt{x}} = \frac{(1 + \sqrt{x}) \cos\left(\frac{\pi x}{2}\right)}{(1 - \sqrt{x})(1 + \sqrt{x})} = \frac{(1 + \sqrt{x}) \cos\left(\frac{\pi x}{2}\right)}{1 - x}$$

Posons maintenant : $x = 1 + h$. On aura alors : $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{h \rightarrow 0} f(1 + h)$.

On a :

$$\begin{aligned} f(1+h) &= (1+\sqrt{1+h}) \frac{\cos\left(\frac{\pi(1+h)}{2}\right)}{1-(1+h)} \\ &= (1+\sqrt{1+h}) \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi h}{2}\right)}{(-h)} \\ &= (1+\sqrt{1+h}) \frac{\sin\left(\frac{\pi h}{2}\right)}{h} \\ &= \frac{\pi}{2} (1+\sqrt{1+h}) \frac{\sin\left(\frac{\pi h}{2}\right)}{\frac{\pi h}{2}} \end{aligned}$$

Comme $\lim_{h \rightarrow 0} (1+\sqrt{1+h}) = 2$ et $\lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{\sin\left(\frac{\pi h}{2}\right)}{\frac{\pi h}{2}} \right) = 1$, il vient : $\lim_{h \rightarrow 0} f(1+h) = \pi$.

Soit, finalement : $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \pi$.

Résultat final

$$\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{\cos\left(\frac{\pi x}{2}\right)}{1-\sqrt{x}} \right) = \pi$$