Déterminer :

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\ln(\cos x)}{x^2}\right)$$

Analyse

Comme nous avons : $\lim_{x\to 0}\cos x=\cos(0)=1$, il vient $\lim_{x\to 0}\ln(\cos x)=0$. Nous sommes confrontés à une forme indéterminée du type « $\frac{0}{0}$ ».

Nous proposons ici deux approches : la première vise à transformer le cosinus en utilisant une égalité classique de trigonométrie ; la seconde fait appel aux équivalents de fonctions.

Résolution

1ère approche : transformer le cosinus

On a : $\cos x=1-2\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)$. On a donc : $\frac{\ln(\cos x)}{x^2}=\frac{\ln\left(1-2\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)\right)}{x^2}$.

Lorsque x tend vers 0, la quantité $-2\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)$ tend également vers 0.

Or, nous disposons du résultat classique : $\lim_{h\to 0}\left(\frac{\ln(1+h)}{h}\right)=1$.

On va donc faire apparaître une expression de ce type :

$$\frac{\ln\left(1-2\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)\right)}{x^2}=\frac{\ln\left(1-2\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)\right)}{\left(-2\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)\right)}\frac{\left(-2\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)\right)}{x^2}$$

$$=-\frac{1}{2}\frac{\ln\left(1-2\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)\right)}{\left(-2\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)\right)}\frac{\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}{\left(\frac{x}{2}\right)^2}=-\frac{1}{2}\frac{\ln\left(1-2\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)\right)}{\left(-2\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)\right)}\left(\frac{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}{\frac{x}{2}}\right)^2$$

Comme on a : $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\ln\left(1-2\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)\right)}{\left(-2\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)\right)}\right)=\lim\limits_{h\to 0}\left(\dfrac{\ln(1+h)}{h}\right)=1$ et $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}{\frac{x}{2}}\right)=1$, il vient finalement :

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\ln(\cos x)}{x^2}\right)=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\ln\left(1-2\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)\right)}{x^2}\right)=-\frac{1}{2}$$

2ème approche : utiliser les équivalents de fonctions

On a classiquement au voisinage de 0 : $\cos x \sim 1-\dfrac{x^2}{2}$.

On en déduit : $\ln(\cos x)\sim \ln\left(1-\dfrac{x^2}{2}\right)\sim -\dfrac{x^2}{2}$ et $\dfrac{\ln(\cos x)}{x^2}\sim -\dfrac{\frac{x^2}{2}}{x^2}=-\dfrac{1}{2}$.

D'où : $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\ln(\cos x)}{x^2}\right)=-\dfrac{1}{2}$.

On a retrouvé le résultat obtenu précédemment.

Résultat final

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\ln(\cos x)}{x^2}\right)=-\frac{1}{2}$$