Déterminer :

$$\lim_{x\to+\infty}\left(x\left(\ln\left(x+1\right)-\ln\left(x\right)\right)\right)$$

Analyse

Comme nous avons : $\lim_{x\to+\infty}\ln\left(x+1\right)=\lim_{x\to+\infty}\ln\left(x\right)=+\infty$, nous avons une indétermination au niveau de la différence $\ln\left(x+1\right)-\ln\left(x\right)$. On la lève facilement en considérant le logarithme du rapport en lieu et place de la différence des logarithmes …

Résolution

Considérons donc la fonction *f* définie par : $f(x)=x\left(\ln\left(x+1\right)-\ln\left(x\right)\right)$.

On a :

$$f(x)=x\left(\ln\left(x+1\right)-\ln\left(x\right)\right)=x\ln\left(\frac{x+1}{x}\right)=x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)=\frac{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}}$$

Lorsque x tend vers $+\infty$, $\frac{1}{x}$ tend vers 0 et on peut donc écrire, en posant $h=\frac{1}{x}$:

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{h\to0}\left(\frac{\ln\left(1+h\right)}{h}\right)=1$$

Résultat final

$$\lim_{x\to+\infty}\left(x\left(\ln\left(x+1\right)-\ln\left(x\right)\right)\right)=1$$