Déterminer :

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sinh x}{x}\right) \text{ et } \lim_{x\to 0}\left(\frac{\cosh(x)-1}{x^2}\right)$$

Analyse

On traite les deux problèmes dans l'ordre suggéré. Pour chacun nous proposons deux approches. La première limite peut être déterminée sans faire appel aux notions élémentaires des fonctions dérivables. Quant à la deuxième limite, elle se calcule facilement à partir du résultat obtenu pour la première mais ça n'est en rien la seule possibilité …

Résolution

→ Calcul de $\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sinh x}{x}\right)$

1ère approche : et s'il s'agissait d'un nombre dérivé ?

On identifie, en effet, la définition du nombre dérivé de la fonction sinus hyperbolique en 0 puisque l'on a :

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sinh x}{x}\right)=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sinh x-\sinh(0)}{x-0}\right)=\sinh'(0)=\cosh(0)=1$$

Cette approche suppose connus la notion de dérivation et le fait que la fonction sinus hyperbolique soit dérivable sur $\mathbb{R}$ et de dérivée égale à la fonction cosinus hyperbolique. On peut cependant obtenir ce résultat autrement comme indiqué ci-après.

2ème approche : utiliser des limites connues

Ici, on revient à la définition du sinus hyperbolique afin de faire apparaître des expressions dont les dérivées en 0 sont connues :

$$\frac{\sinh x}{x}=\frac{1}{2}\left(\frac{e^x-e^{-x}}{x}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{e^x-1}{x}+\frac{e^{-x}-1}{-x}\right)$$

Comme on a : $\lim_{x\to 0}\left(\frac{e^x-1}{x}\right)=\lim_{x\to 0}\left(\frac{e^{-x}-1}{-x}\right)=1$, il vient : $\lim_{x\to 0}\frac{\sinh x}{x}=\frac{1}{2}(1+1)=1$.

On a retrouvé le résultat précédemment obtenu.

→ Calcul de $\lim_{x\to 0}\left(\frac{\cosh(x)-1}{x^2}\right)$

1ère approche : utiliser des limites connues

On revient à la définition du cosinus hyperbolique pour faire apparaître des expressions dont les limites en 0 sont connues :

$$\frac{\cosh(x)-1}{x^2}=\frac{1}{2}\frac{e^x+e^{-x}-2}{x^2}=\frac{1}{2}\frac{\left(e^{\frac{x}{2}}-e^{-\frac{x}{2}}\right)^2}{x^2}=\frac{1}{2}\left(\frac{e^{\frac{x}{2}}-e^{-\frac{x}{2}}}{x}\right)^2$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{e^{\frac{x}{2}}-1}{x}+\frac{e^{-\frac{x}{2}}-1}{-x}\right)^2=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\left(\frac{e^{\frac{x}{2}}-1}{\frac{x}{2}}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{e^{-\frac{x}{2}}-1}{-\frac{x}{2}}\right)\right)^2$$

Comme on a : $\lim_{x\to 0}\left(\frac{e^{\frac{x}{2}}-1}{\frac{x}{2}}\right)=\lim_{x\to 0}\left(\frac{e^{-\frac{x}{2}}-1}{-\frac{x}{2}}\right)=1$, il vient : $\lim_{x\to 0}\left(\frac{\cosh(x)-1}{x^2}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{2}$.

2ème approche : utiliser le résultat du premier calcul

Ici, on utilise la formule : $\cosh x=1+2\sinh^2\left(\frac{x}{2}\right)$.

On a alors : $\frac{\cosh(x)-1}{x^2}=\frac{2\sinh^2\left(\frac{x}{2}\right)}{x^2}=\frac{1}{2}\frac{\sinh^2\left(\frac{x}{2}\right)}{\left(\frac{x}{2}\right)^2}=\frac{1}{2}\left(\frac{\sinh\left(\frac{x}{2}\right)}{\frac{x}{2}}\right)^2$

Or, d'après le résultat du premier calcul, on a : $\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sinh x}{x}\right)=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sinh\left(\frac{x}{2}\right)}{\frac{x}{2}}\right)=1$.

On en déduit alors :

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\cosh(x)-1}{x^2}\right)=\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{2}\left(\frac{\sinh\left(\frac{x}{2}\right)}{\frac{x}{2}}\right)^2\right)=\frac{1}{2}1^2=\frac{1}{2}$$

On retrouve le résultat obtenu précédemment.

Résultat final

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sinh x}{x}\right)=1 \text{ et } \lim_{x\to 0}\left(\frac{\cosh(x)-1}{x^2}\right)=\frac{1}{2}$$