Déterminer :

$$\lim_{x\to 0}\left(\left(\cos x\right)^{\frac{1}{x}}\right)$$

Analyse

Comme $\lim_{x\to 0}\cos x=\cos\left(0\right)=1$ et $\lim_{x\to 0}\left|\frac{1}{x}\right|=+\infty$, nous sommes confrontés à une forme indéterminée du type « 1^{∞} ». Plusieurs approches permettent de lever l'indétermination.

Comme, au voisinage de 0, la fonction *f* définie par $f\left(x\right)=\left(\cos x\right)^{\frac{1}{x}}$ prend des valeurs positives, on peut considérer le logarithme népérien de *f* pour mener les calculs. Pour autant, on peut travailler directement avec la fonction *f* elle-même.

Résolution

1ère approche : détermination directe

On considère donc la fonction *f* définie par : $f\left(x\right)=\left(\cos x\right)^{\frac{1}{x}}$.

On utilise la relation : $\cos x=1-2\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)$ pour récrire $f\left(x\right)$:

$$\begin{aligned}
f\left(x\right)&=\left(1-2\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)\right)^{\frac{1}{x}}\\
&=\left(\left(1-2\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)\right)^{\frac{1}{2\times\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}}\right)^{\frac{2\times\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}{x}}\\
&=\left(\left(1-2\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)\right)^{\frac{1}{2\times\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}}\right)^{\frac{2\times\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}{\left(\frac{x}{2}\right)^2}\times\frac{x}{4}}\\
&=\left(\left(1-2\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)\right)^{\frac{1}{2\times\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}}\right)^{\frac{\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}{\left(\frac{x}{2}\right)^2}\times\frac{x}{2}}
\end{aligned}$$

L'objectif de cette « manipulation » des puissances est de faire apparaître des limites connues.

Comme on a : $\lim_{x\to 0} \frac{1}{\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)} = +\infty$, il vient (composition) classiquement :

$$\lim_{x\to 0}\left(\left(1-2\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)\right)^{\frac{1}{2\times\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}}\right) = \lim_{X\to+\infty}\left(1-\frac{1}{X}\right)^X = e^{-1} = \frac{1}{e}$$

Par ailleurs, on a : $\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}{\frac{x}{2}}\right) = 1$ et donc : $\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}{\left(\frac{x}{2}\right)^2} = \lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}{\frac{x}{2}}\right)^2 = 1$.

D'où : $\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}{\left(\frac{x}{2}\right)^2}\times\frac{x}{2}\right) = 1\times 0 = 0$.

$f(x)$ a donc été mise sous la forme : $f(x) = g(x)^{h(x)}$ avec : $\lim_{x\to 0} g(x) = \frac{1}{e}$ et $\lim_{x\to 0} h(x) = 0$.

On en déduit finalement : $\lim_{x\to 0} f(x) = \left(\frac{1}{e}\right)^0 = 1$.

2ème approche : considérer le logarithme népérien de f

Introduisons la fonction g définie au voisinage de 0 par : $g(x) = \ln\left(f(x)\right) = \frac{\ln\left(\cos x\right)}{x}$.

En utilisant à nouveau : $\cos x = 1-2\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)$, on obtient :

$$g(x) = \frac{\ln\left(1-2\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)\right)}{x} = \left(\frac{\ln\left(1-2\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)\right)}{-2\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}\right)\left(\frac{-2\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}{x}\right)$$

$$= \left(\frac{\ln\left(1-2\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)\right)}{-2\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}\right)\left(\frac{-2\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}{\left(\frac{x}{2}\right)^2}\right)\left(\frac{x}{4}\right)$$

On peut à nouveau faire apparaître des limites connues.

En effet, comme $\lim_{x\to 0}\sin\left(\frac{x}{2}\right)=\lim_{x\to 0}\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)=0$, on a :

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\ln\left(1-2\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)\right)}{-2\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}\right)=\lim_{X\to 0}\frac{\ln(1+X)}{X}=1$$

Par ailleurs, on a : $\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}{\frac{x}{2}}\right)=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}{\left(\frac{x}{2}\right)^2}\right)=1$ et donc : $\lim_{x\to 0}\left(\frac{-2\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}{\left(\frac{x}{2}\right)^2}\right)=-2$.

Enfin, on a clairement : $\lim_{x\to 0}\left(\frac{x}{4}\right)=0$.

On en tire alors : $\lim_{x\to 0} g(x)=1\times(-2)\times 0=0$. Soit : $\lim_{x\to 0} f(x)=1$.

Cette manipulation sur le logarithme népérien de *f* n'est pas fondamentalement différente de ce que nous avons effectué plus haut. L'usage du logarithme nous a simplement permis de ne pas travailler avec les puissances !

3ème approche : utiliser les équivalents de fonctions

Ici encore, nous considérons le logarithme népérien de la fonction *f* au voisinage de 0 en introduisant la fonction *g* définie par : $g(x)=\frac{\ln(\cos x)}{x}$.

Cette fois, nous utilisons l'équivalence classique, valable au voisinage de 0 : $\cos x \sim 1-\frac{x^2}{2}$.

On en tire alors : $\ln(\cos x)\sim -\frac{x^2}{2}$ et donc : $\frac{\ln(\cos x)}{x}\sim -\frac{x}{2}$.

D'où : $\lim_{x\to 0}\frac{\ln(\cos x)}{x}=\lim_{x\to 0}\left(-\frac{x}{2}\right)=0$. Soit, $\lim_{x\to 0} f(x)=1$.

On retrouve le résultat obtenu précédemment.

Résultat final

$$\lim_{x\to 0}\left(\cos x\right)^{\frac{1}{x}}=1$$