Déterminer :

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^x\right)$$

## Analyse

Comme $\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)=1$ et $\lim_{x\to+\infty} x=+\infty$, nous sommes confrontés à une forme indéterminée du type « $1^\infty$ ». Plusieurs approches permettent de lever l'indétermination. Comme, au voisinage de $+\infty$, la fonction *f* définie par $f(x)=\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^x$ prend des valeurs positives, on peut en considérer le logarithme népérien pour mener les calculs. Pour autant, on peut travailler directement avec la fonction *f* elle-même.

## Résolution

### *1ère approche : détermination directe*

On considère donc la fonction *f* définie par : $f(x)=\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^x$.

Nous en transformons l'écriture pour faire apparaître des expressions dont les limites en $+\infty$ sont connues.

On a :

$$f(x)=\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^x=\frac{(x-1)^x}{(x+1)^x}=\frac{\left(x\left(1-\frac{1}{x}\right)\right)^x}{\left(x\left(1+\frac{1}{x}\right)\right)^x}=\frac{x^x\left(1-\frac{1}{x}\right)^x}{x^x\left(1+\frac{1}{x}\right)^x}=\frac{\left(1-\frac{1}{x}\right)^x}{\left(1+\frac{1}{x}\right)^x}$$

Or, on a la limite classique : $\forall a\in\mathbb{R}^*,\lim_{x\to\infty}\left(\left(1+\frac{a}{x}\right)^x\right)=e^a$.

On en tire : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \dfrac{\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1-\dfrac{1}{x}\right)^x}{\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x} = \dfrac{e^{-1}}{e^1} = \dfrac{1}{e^2}$.

### *2ème approche : considérer le logarithme népérien de f*

Introduisons la fonction $g$ définie sur $]1,+\infty[$ par : $g(x) = \ln\left(f(x)\right) = x\ln\left(\dfrac{x-1}{x+1}\right)$.

On en transforme l'écriture pour faire apparaître des expressions de limites connues en $+\infty$ :

$$x\ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right) = x\ln\left(\frac{(x+1)-2}{x+1}\right) = x\ln\left(1-\frac{2}{x+1}\right) = x\left(-\frac{2}{x+1}\right)\frac{\ln\left(1-\dfrac{2}{x+1}\right)}{\left(-\dfrac{2}{x+1}\right)}$$

$$= -2\left(\frac{x}{x+1}\right)\frac{\ln\left(1-\dfrac{2}{x+1}\right)}{\left(-\dfrac{2}{x+1}\right)}$$

On a facilement : $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x}{x+1}\right) = 1$.

Par ailleurs, comme $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{-2}{x+1}\right) = 0$, on a (voir cours) : $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{\ln\left(1-\dfrac{2}{x+1}\right)}{\left(-\dfrac{2}{x+1}\right)}\right) = 1$.

Finalement : $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(x\ln\left(\dfrac{x-1}{x+1}\right)\right) = -2$. On en tire alors : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = e^{-2} = \dfrac{1}{e^2}$.

On a retrouvé le résultat obtenu précédemment.

## Résultat final

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^x\right) = \frac{1}{e^2}$$