Déterminer :

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\left(\frac{1}{x^2}\right)^{\frac{2x}{x+1}}\right)$$

Analyse

L'exercice ne pose pas de difficulté particulière puisqu'il n'y a aucune forme indéterminée à lever. On propose ici deux approches, selon que l'on considère ou non le logarithme népérien de la fonction.

Résolution

1ère approche : détermination directe

On considère la fonction *f* définie par : $f(x)=\left(\frac{1}{x^2}\right)^{\frac{2x}{x+1}}$.

On a : $\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{x^2}\right)=0$ et $\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{2x}{x+1}\right)=2$.

Il vient alors immédiatement : $\lim_{x\to+\infty} f(x)=0^2=0$.

2ème approche : considérer le logarithme népérien de f

Introduisons la fonction *g* définie sur $\mathbb{R}^*$ par : $g(x)=\ln\left(f(x)\right)=\frac{2x}{x+1}\ln\left(\frac{1}{x^2}\right)=-\frac{4x}{x+1}\ln|x|$.

On a $\lim_{x\to+\infty}\left(-\frac{4x}{x+1}\right)=-4$ et $\lim_{x\to+\infty}\left(\ln|x|\right)=+\infty$.

D'où : $\lim_{x\to+\infty} g(x)=-\infty$ et donc : $\lim_{x\to+\infty} f(x)=0$.

Résultat final

$$\lim_{x \to +\infty} \left(\left(\frac{1}{x^2} \right)^{\frac{2x}{x+1}} \right) = 0$$