

Déterminer :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\left(\frac{x-1}{x+3} \right)^{x+2} \right)$$

Analyse

Comme $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x-1}{x+3} \right) = 1$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x+2) = +\infty$, nous sommes confrontés à une forme indéterminée du type « 1^∞ ». L'exercice se traite en faisant apparaître des expressions dont les limites en $+\infty$ sont connues.

En guise de préambule, on remarquera, avant tout autre calcul, que l'on peut un peu simplifier le problème ...

Résolution

Préambule

Soit la fonction f , définie sur $] -\infty, -3[\cup]1, +\infty[$, par $f(x) = \left(\frac{x-1}{x+3} \right)^{x+2}$.

On peut écrire : $f(x) = \left(\frac{x-1}{x+3} \right)^{x+2} = \left(\frac{x-1}{x+3} \right)^x \left(\frac{x-1}{x+3} \right)^2$.

Or, on a vu que : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x-1}{x+3} \right) = 1$. On en tire : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\left(\frac{x-1}{x+3} \right)^2 \right) = 1$. D'où :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\left(\frac{x-1}{x+3} \right)^x \right).$$

De fait, le « véritable » exercice consiste à déterminer : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\left(\frac{x-1}{x+3} \right)^x \right)$

1^{ère} approche : traiter le numérateur et le dénominateur séparément

On a, pour $x > 1$:

$$\left(\frac{x-1}{x+3}\right)^x = \frac{(x-1)^x}{(x+3)^x} = \frac{\left(x\left(1-\frac{1}{x}\right)\right)^x}{\left(x\left(1+\frac{3}{x}\right)\right)^x} = \frac{x^x\left(1-\frac{1}{x}\right)^x}{x^x\left(1+\frac{3}{x}\right)^x} = \frac{\left(1-\frac{1}{x}\right)^x}{\left(1+\frac{3}{x}\right)^x}$$

Or, on a le résultat classique (voir cours) : $\forall a \in \mathbb{R}^*$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{a}{x}\right)^x = e^a$. Il vient donc :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x-1}{x+3}\right)^x = \frac{\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{1}{x}\right)^x}{\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{3}{x}\right)^x} = \frac{e^{-1}}{e^3} = \frac{1}{e^4}$$

Soit finalement : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \frac{1}{e^4}$.

2^{ème} approche : transformer la fraction rationnelle

On a :

$$\left(\frac{x-1}{x+3}\right)^x = \left(\frac{(x+3)-4}{x+3}\right)^x = \left(1 - \frac{4}{x+3}\right)^x = \left(1 - \frac{4}{x+3}\right)^{x+3} \left(1 - \frac{4}{x+3}\right)^{-3}$$

Comme : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{4}{x+3}\right) = 0$, il vient $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{4}{x+3}\right)^{-3} = 1^{-3} = 1$.

Par ailleurs, on a : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{4}{x+3}\right)^{x+3} = \lim_{X \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{4}{X}\right)^X = e^{-4}$.

On en tire donc : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x-1}{x+3}\right)^x = e^{-4}$.

On retrouve le résultat obtenu précédemment.

Résultat final

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x-1}{x+3} \right)^{x+3} = \frac{1}{e^4}$$