Soient a, b et c trois réels strictement positifs. Déterminer :

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\left(\frac{a^{\frac{1}{x}}+b^{\frac{1}{x}}}{2}\right)^x\right) \text{ et } \lim_{x\to+\infty}\left(\left(\frac{a^{\frac{1}{x}}+b^{\frac{1}{x}}+c^{\frac{1}{x}}}{3}\right)^x\right)$$

Généraliser.

Analyse

Pour a, b et c strictement positifs, on a $\lim_{x\to+\infty}\left(a^{\frac{1}{x}}\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(b^{\frac{1}{x}}\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(c^{\frac{1}{x}}\right)=a^0=b^0=c^0=1$.

On a donc : $\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{a^{\frac{1}{x}}+b^{\frac{1}{x}}}{2}\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{a^{\frac{1}{x}}+b^{\frac{1}{x}}+c^{\frac{1}{x}}}{3}\right)=1$. Nous sommes donc confrontés à une forme indéterminée du type « 1^∞ ». Pour lever l'indétermination, il convient de revenir à la définition de la fonction puissance et d'étudier le comportement des logarithmes des fonctions étudiées au voisinage de 0.

Résolution

→ Calcul de $\lim_{x\to+\infty}\left(\left(\frac{a^{\frac{1}{x}}+b^{\frac{1}{x}}}{2}\right)^x\right)$

Soit donc la fonction f définie par $f(x)=\left(\frac{a^{\frac{1}{x}}+b^{\frac{1}{x}}}{2}\right)^x$. Nous définissons alors la fonction g par : $g(x)=\ln\left(f(x)\right)=\ln\left(\left(\frac{a^{\frac{1}{x}}+b^{\frac{1}{x}}}{2}\right)^x\right)=x\ln\left(\frac{a^{\frac{1}{x}}+b^{\frac{1}{x}}}{2}\right)$.

Le facteur du logarithme népérien étant x, nous allons effectuer un développement limité en $+\infty$ de $\frac{a^{\frac{1}{x}}+b^{\frac{1}{x}}}{2}$ au premier ordre.

On a :

$$\frac{a^{\frac{1}{x}}+b^{\frac{1}{x}}}{2}=\frac{1}{2}\left(e^{\frac{\ln a}{x}}+e^{\frac{\ln b}{x}}\right)=\frac{1}{2}\left(1+\frac{\ln a}{x}+1+\frac{\ln b}{x}+o\left(\frac{1}{x}\right)\right)=1+\frac{\ln(ab)}{2}\frac{1}{x}+o\left(\frac{1}{x}\right)$$

En considérant alors le logarithme népérien de ce développement limité, on a :

$$\ln\left(\frac{a^{\frac{1}{x}}+b^{\frac{1}{x}}}{2}\right)=\ln\left(1+\frac{\ln(ab)}{2}\frac{1}{x}+o\left(\frac{1}{x}\right)\right)=\frac{\ln(ab)}{2}\frac{1}{x}+o\left(\frac{1}{x}\right)$$

En multipliant par x, il vient finalement :

$$g(x)=\frac{\ln(ab)}{2}+o(1)$$

C'est à dire : $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=\frac{\ln(ab)}{2}=\ln\left(\sqrt{ab}\right)$.

On en déduit alors :

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\sqrt{ab}$$

→ Calcul de $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\left(\frac{a^{\frac{1}{x}}+b^{\frac{1}{x}}+c^{\frac{1}{x}}}{3}\right)^x\right)$

On mène les calculs comme précédemment :

$$\frac{a^{\frac{1}{x}}+b^{\frac{1}{x}}+c^{\frac{1}{x}}}{3}=1+\frac{\ln(abc)}{3}\frac{1}{x}+o\left(\frac{1}{x}\right)$$

Puis :

$$\ln\left(\frac{a^{\frac{1}{x}}+b^{\frac{1}{x}}+c^{\frac{1}{x}}}{3}\right)=\ln\left(1+\frac{\ln(abc)}{3}\frac{1}{x}+o\left(\frac{1}{x}\right)\right)=\frac{\ln(abc)}{3}\frac{1}{x}+o\left(\frac{1}{x}\right)$$

D'où : $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\ln\left(f(x)\right)\right)=\frac{\ln(abc)}{3}$.

Soit, finalement :

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\sqrt[3]{abc}$$

→ Généralisation

On considère n réels strictement positifs : $a_1,\ a_2,\ ...,\ a_n$ et on va déterminer :

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\left(\frac{a_1^{\frac{1}{x}}+a_2^{\frac{1}{x}}+...+a_n^{\frac{1}{x}}}{n}\right)^x\right)$$

A nouveau, on introduit la fonction g définie par : $g(x)=\ln\left(f(x)\right)=x\ln\left(\frac{a_1^{\frac{1}{x}}+a_2^{\frac{1}{x}}+...+a_n^{\frac{1}{x}}}{n}\right)$.

Au voisinage de $+\infty$, on a : $\forall i\in\{1,2,...,n\},\ a_i^{\frac{1}{x}}=e^{\frac{\ln a_i}{x}}=1+\frac{\ln a_i}{x}+o\left(\frac{1}{x}\right)$.

D'où :

$$\begin{aligned}\ln\left(\frac{a_1^{\frac{1}{x}}+a_2^{\frac{1}{x}}+...+a_n^{\frac{1}{x}}}{n}\right)&=\ln\left(\frac{1}{n}\left(\left(1+\frac{\ln a_1}{x}+o\left(\frac{1}{x}\right)\right)+\left(1+\frac{\ln a_2}{x}+o\left(\frac{1}{x}\right)\right)+...+\left(1+\frac{\ln a_n}{x}+o\left(\frac{1}{x}\right)\right)\right)\right)\\&=\ln\left(\frac{1}{n}\left(n+\frac{\ln\left(a_1a_2...a_n\right)}{x}\right)+o\left(\frac{1}{x}\right)\right)\\&=\ln\left(1+\frac{\ln\left(a_1a_2...a_n\right)}{nx}+o\left(\frac{1}{x}\right)\right)\\&=\frac{\ln\left(a_1a_2...a_n\right)}{nx}+o\left(\frac{1}{x}\right)\end{aligned}$$

Il vient donc, au voisinage de $+\infty$:

$$g(x)=\frac{\ln\left(a_1a_2...a_n\right)}{n}+o(1)$$

D'où : $\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=\frac{\ln\left(a_1a_2...a_n\right)}{n}=\ln\left(\left(a_1a_2...a_n\right)^{\frac{1}{n}}\right)=\ln\left(\sqrt[n]{a_1a_2...a_n}\right)$.

Finalement :

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\left(\frac{a_1^{\frac{1}{x}}+a_2^{\frac{1}{x}}+...+a_n^{\frac{1}{x}}}{n}\right)^x\right)=\sqrt[n]{a_1a_2...a_n}$$

Résultat final

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\left(\frac{a_1^{\frac{1}{x}}+a_2^{\frac{1}{x}}+\ldots+a_n^{\frac{1}{x}}}{n}\right)^x\right)=\sqrt[n]{a_1a_2\ldots a_n}$$

avec, en particulier :

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\left(\frac{a^{\frac{1}{x}}+b^{\frac{1}{x}}}{2}\right)^x\right)=\sqrt{ab}\quad\text{et}\quad\lim_{x\to+\infty}\left(\left(\frac{a^{\frac{1}{x}}+b^{\frac{1}{x}}+c^{\frac{1}{x}}}{3}\right)^x\right)=\sqrt[3]{abc}$$