Déterminer :

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}\ln\left(\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\right)\right)$$

Analyse

Cet exercice consiste en fait à étudier une éventuelle prolongation par continuité en 0 de la fonction *f* définie sur $]-1\,;0[\cup]0\,;1[$ par $f(x)=\dfrac{1}{x}\ln\sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}$.

Comme on a : $\lim_{x\to 0}\left(\ln\left(\sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}\right)\right)=\ln(1)=0$, nous sommes confrontés à une forme indéterminée du type « $\dfrac{0}{0}$ ». Pour la lever, il « suffit » de récrire *f* pour faire apparaître des expressions admettant des limites connues en 0.

Résolution

On a : $\forall x\in]-1\,;0[\cup]0\,;1[$:

$$f(x)=\frac{1}{2x}\left(\ln(1+x)-\ln(1-x)\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{\ln(1+x)}{x}-\frac{\ln(1-x)}{x}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{\ln(1+x)}{x}+\frac{\ln(1-x)}{-x}\right)$$

Or, on a :

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\ln(1+x)}{x}\right)=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\ln(1-x)}{-x}\right)=1$$

D'où : $\lim_{x\to 0}f(x)=\dfrac{1}{2}(1+1)=1$.

La fonction *f* admet une limite finie en 0 et peut être prolongée par continuité en posant : $f(0)=1$.

Résultat final

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}\ln\left(\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\right)\right)=1$$