Déterminer :

$$\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{\ln\left(1+e^x\right)}{x}\right) \text{ et } \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\ln\left(1+e^x\right)}{x}\right)$$

Analyse

La première limite ne présente pas de forme indéterminée et se calcule directement. Quant à la seconde, on l'obtient facilement en factorisant, par exemple, l'argument du logarithme.

Résolution

→ Calcul de $\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{\ln\left(1+e^x\right)}{x}\right)$

On a : $\lim_{x\to-\infty} e^x = \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{e^x}=0$. D'où : $\lim_{x\to-\infty}\left(\ln\left(1+e^x\right)\right)=\ln\left(1\right)=0$.

Par ailleurs : $\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x}=0$.

D'où, finalement : $\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{\ln\left(1+e^x\right)}{x}\right)=0\times 0=0$

→ Calcul de $\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\ln\left(1+e^x\right)}{x}\right)$

En écrivant $1+e^x=e^x\left(1+\frac{1}{e^x}\right)$, il vient, ces deux facteurs étant positifs :

$$\ln\left(1+e^x\right)=\ln\left(e^x\left(1+\frac{1}{e^x}\right)\right)=\ln\left(e^x\right)+\ln\left(1+\frac{1}{e^x}\right)=x+\ln\left(1+\frac{1}{e^x}\right)$$

D'où :

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\ln\left(1+e^x\right)}{x}\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x+\ln\left(1+\frac{1}{e^x}\right)}{x}\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{\ln\left(1+\frac{1}{e^x}\right)}{x}\right)=1+\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\ln\left(1+\frac{1}{e^x}\right)}{x}\right)$$

Or, on a vu que : $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\ln\left(1+\frac{1}{e^x}\right)\right)=0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0$. Donc : $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{\ln\left(1+\frac{1}{e^x}\right)}{x}\right)=0$.

Finalement : $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{\ln\left(1+e^x\right)}{x}\right)=1$.

Note : on pouvait également, pour cette seconde limite, utiliser les équivalents de fonctions en écrivant, au voisinage de $+\infty$: $1+e^x\sim e^x$. On a alors : $\ln\left(1+e^x\right)\sim\ln\left(e^x\right)=x$ et, finalement : $\frac{\ln\left(1+e^x\right)}{x}\sim\frac{x}{x}=1$, c'est à dire : $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{\ln\left(1+e^x\right)}{x}\right)=1$

Résultat final

$$\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{\ln\left(1+e^x\right)}{x}\right)=0 \text{ et } \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\ln\left(1+e^x\right)}{x}\right)=1$$