

Déterminer :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{e^{ax} - e^{bx}}{x} \right) \text{ où } a \text{ et } b \text{ sont deux réels non nuls.}$$

---

## Analyse

Comme on a  $\lim_{x \rightarrow 0} (e^{ax} - e^{bx}) = e^0 - e^0 = 1 - 1 = 0$ , nous sommes confrontés à une forme indéterminée du type «  $\frac{0}{0}$  ». On peut rapidement lever l'indétermination en identifiant des nombres dérivés ou en travaillant avec des développements limités. Nous développons ci-après les deux approches.

---

## Résolution

*1<sup>ère</sup> approche : identifier des nombres dérivés*

Soit la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}^*$  par  $f(x) = \frac{e^{ax} - e^{bx}}{x}$ .

On peut la récrire comme suit :

$$f(x) = \frac{e^{ax} - e^{bx}}{x} = \frac{e^{ax} - 1}{x} - \frac{e^{bx} - 1}{x}$$

Or, on a :  $\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{e^{ax} - 1}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{e^{ax} - e^0}{x - 0} \right) = (e^{ax})'(0) = (ae^{ax})(0) = ae^0 = a$ .

La limite du premier terme n'est rien d'autre que la valeur en 0 de la dérivée de la fonction  $f_a(x) = e^{ax}$ .

Il en va de même pour le deuxième terme :  $\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{e^{bx} - 1}{x} \right) = b$ .

Finalement :  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{e^{ax} - e^{bx}}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{e^{ax} - 1}{x} \right) - \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{e^{bx} - 1}{x} \right) = a - b$ .

*2<sup>ème</sup> approche : utiliser des développements limités*

Au voisinage de 0, on a les développements limités au premier ordre suivants :

$$e^{ax} = 1 + ax + o(x) \text{ et } e^{bx} = 1 + bx + o(x)$$

D'où :  $e^{ax} - e^{bx} = (a-b)x + o(x)$  et, finalement :  $\frac{e^{ax} - e^{bx}}{x} = (a-b) + o(1)$ .

C'est à dire :  $\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{e^{ax} - e^{bx}}{x} \right) = a - b$ .

---

## Résultat final

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{e^{ax} - e^{bx}}{x} \right) = a - b$$