

Déterminer :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1 - e^x}{\sin x} \right)$$

Analyse

Comme on a $\lim_{x \rightarrow 0} (1 - e^x) = 1 - 1 = 0$ et $\lim_{x \rightarrow 0} (\sin x) = 0$, nous sommes confrontés à une forme indéterminée du type « $\frac{0}{0}$ ». On peut la lever de diverses manières : par exemple, en faisant apparaître des expressions dont les limites sont connues ou en utilisant des équivalents de fonctions.

Résolution

1^{ère} approche : utiliser des limites connues

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R} - \{k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$ par $f(x) = \frac{1 - e^x}{\sin x}$.

On peut la récrire comme suit : $f(x) = -\frac{e^x - 1}{x} \frac{x}{\sin x}$.

Or, on a : $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{e^x - 1}{x} \right) = 1$ et $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin x}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{x}{\sin x} \right) = 1$.

Il vient donc : $\lim_{x \rightarrow 0} \left(-\frac{e^x - 1}{x} \frac{x}{\sin x} \right) = -(1 \times 1) = -1$.

Finalement : $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1 - e^x}{\sin x} \right) = -1$.

2^{ème} approche : utiliser des équivalents de fonctions

On a les équivalents classiques au voisinage de 0 :

$$e^x - 1 \sim x \text{ et } \sin x \sim x. \text{ On en déduit donc : } \frac{e^x - 1}{\sin x} \sim \frac{x}{x} = 1.$$

$$\text{C'est à dire : } \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{e^x - 1}{\sin x} \right) = 1 \text{ ou } \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1 - e^x}{\sin x} \right) = -1.$$

Résultat final

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1 - e^x}{\sin x} \right) = -1$$