

Déterminer :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{\arctan(x^2 - x \sin x)}{\left( \ln \left( \frac{\sin x}{x} \right) \right)^2} \right)$$

---

### Analyse

Comme on a  $\lim_{x \rightarrow 0} (x^2 - x \sin x) = 0 - 0 = 0$ , il vient :  $\lim_{x \rightarrow 0} (\arctan(x^2 - x \sin x)) = 0$ . Par ailleurs, on a :  $\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{\sin x}{x} \right) = 1$  et donc :  $\lim_{x \rightarrow 0} \left( \left( \ln \left( \frac{\sin x}{x} \right) \right)^2 \right) = 0$ . Nous sommes donc confrontés à une forme indéterminées de type «  $\frac{0}{0}$  ». On la lève en menant en 0 des développements limités du numérateur et du dénominateur qui permettent de trouver des équivalents simples.

---

### Résolution

Le développement limité en 0 à l'ordre 4 du sinus s'écrit :

$$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)$$

Il vient alors :  $x^2 - x \sin x = x^2 - x \left( x - \frac{x^3}{6} + o(x^3) \right) = \frac{x^4}{6} + o(x^4)$ .

Or, au voisinage de 0, on a :  $\arctan x \sim x$ .

Il vient donc :

$$\arctan(x^2 - x \sin x) \sim \frac{x^4}{6} \quad (1)$$

Toujours, en utilisant le développement limité du sinus fourni ci-dessus, on a :

$$\frac{\sin x}{x} = 1 - \frac{x^2}{6} + o(x^2)$$

Or, au voisinage de 0, on a :  $\ln(1+x) \sim x$ . On aura alors :  $\ln\left(\frac{\sin x}{x}\right) \sim -\frac{x^2}{6}$  et donc :

$$\left(\ln\left(\frac{\sin x}{x}\right)\right)^2 \sim \frac{x^4}{36} \quad (2)$$

De (1) et (2), on tire finalement :

$$\frac{\arctan(x^2 - x \sin x)}{\left(\ln\left(\frac{\sin x}{x}\right)\right)^2} \sim \frac{\frac{x^4}{6}}{\frac{x^4}{36}} = \frac{36}{6} = 6$$

C'est à dire :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{\arctan(x^2 - x \sin x)}{\left(\ln\left(\frac{\sin x}{x}\right)\right)^2} \right) = 6$$

---

## Résultat final

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{\arctan(x^2 - x \sin x)}{\left(\ln\left(\frac{\sin x}{x}\right)\right)^2} \right) = 6$$