Déterminer :

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\ln(\cosh x)+\ln(\cos x)}{x^2(\cosh x-\cos x)}\right)$$

Analyse

Comme on a $\lim_{x\to 0}(\cosh x)=\lim_{x\to 0}(\cos x)=1$, il vient : $\lim_{x\to 0}\left(\ln(\cosh x)+\ln(\cos x)\right)=0$ et $\lim_{x\to 0}\left(x^2(\cosh x-\cos x)\right)=0$. Nous sommes donc confrontés à une forme indéterminée du type « $\frac{0}{0}$ ». On la lève en menant en 0 des développements limités du numérateur et du dénominateur qui permettent de trouver des équivalents simples. Une petite remarque complémentaire : éviter trop de calcul au niveau du numérateur !

Résolution

Le numérateur s'écrit : $\ln(\cosh x\cos x)$. Sous cette forme, la détermination de son développement limité est plus simple.

Les développements limités du cosinus et de cosinus hyperbolique ne comportent que des termes pairs :

$$\cos x=1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}+\ldots+\frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}+o\left(x^{2n}\right) \text{ et } \cos x=1+\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}+\ldots+\frac{x^{2n}}{(2n)!}+o\left(x^{2n}\right)$$

En effectuant le produit de tels développements limités, on constate que le résultat ne comporte pas de terme en x^2, on va donc chercher le développement limité de ce produit à l'ordre 4 puisque le premier terme suivant le 1 nous fournira, via le logarithme népérien, un équivalent simple du numérateur.

On considère donc les développements limités en 0 à l'ordre 4 du cosinus et du cosinus hyperboliques :

$$\cos x=1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}+o\left(x^4\right)$$
$$\cosh x=1+\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}+o\left(x^4\right)$$

On a alors :

$$\begin{aligned}\cosh x\cos x &= \left(1+\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}+o\left(x^4\right)\right)\left(1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}+o\left(x^4\right)\right)\\ &= 1+\left(\frac{1}{24}+\frac{1}{24}-\frac{1}{4}\right)x^4+o\left(x^4\right)\\ &= 1-\frac{x^4}{6}+o\left(x^4\right)\end{aligned}$$

Comme, au voisinage de 0, on a $\ln\left(1+x\right)\sim x$, on en déduit :

$$\ln\left(\cosh x\cos x\right)=\ln\left(1-\frac{x^4}{6}+o\left(x^4\right)\right)\sim-\frac{x^4}{6}$$

Toujours à partir des développements limités du cosinus et du cosinus hyperboliques, on a :

$$\begin{aligned}\cosh x-\cos x &= \left(1+\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}+o\left(x^4\right)\right)-\left(1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}+o\left(x^4\right)\right)\\ &= x^2+o\left(x^4\right)\end{aligned}$$

D'où : $x^2\left(\cosh x-\cos x\right)=x^4+o\left(x^6\right)$.

Soit :

$$x^2\left(\cosh x-\cos x\right)\sim x^4$$

Il vient finalement :

$$\frac{\ln\left(\cosh x\cos x\right)}{x^2\left(\cosh x-\cos x\right)}\sim-\frac{\frac{x^4}{6}}{x^4}=-\frac{1}{6}$$

C'est à dire : $\lim_{x\to0}\left(\frac{\ln\left(\cosh x\cos x\right)}{x^2\left(\cosh x-\cos x\right)}\right)=-\frac{1}{6}$.

Résultat final

$$\lim_{x\to0}\left(\frac{\ln\left(\cosh x\cos x\right)}{x^2\left(\cosh x-\cos x\right)}\right)=-\frac{1}{6}$$