Déterminer :

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\left(\sqrt[3]{x^3+ax^2+b}-\sqrt[3]{x^3+1}\right)^x\right)$$

où : $(a,b)\in\mathbb{R}^+\times\mathbb{R}$.

Analyse

Soit la fonction *f* définie par $f(x)=\sqrt[3]{x^3+ax^2+b}-\sqrt[3]{x^3+1}$. On peut la récrire comme suit :

$f(x)=\sqrt[3]{x^3\left(1+\frac{a}{x}+\frac{b}{x^3}\right)}-\sqrt[3]{x^3\left(1+\frac{1}{x^3}\right)}=x\left(\sqrt[3]{1+\frac{a}{x}+\frac{b}{x^3}}-\sqrt[3]{1+\frac{1}{x^3}}\right)$. Les deux radicaux admettent 1 comme limite lorsque x tend vers $+\infty$. Sans même considérer la puissance, nous constatons que pour ce qui est de la limite de *f* en $+\infty$, nous sommes confrontés à une forme indéterminée du type « $\infty-\infty$ ».

On va donc commencer par étudier plus finement le comportement de *f* en $+\infty$ en fonction des paramètres *a* et *b* en effectuant un développement limité adéquat.

Résolution

Le développement limité de *f* en $+\infty$ à l'ordre 2 s'écrit :

$$\begin{aligned}
f(x)&=x\left(\left(1+\frac{a}{x}+\frac{b}{x^3}\right)^{\frac{1}{3}}-\left(1+\frac{1}{x^3}\right)^{\frac{1}{3}}\right)\\
&=x\left(\left(1+\frac{1}{3}\left(\frac{a}{x}+\frac{b}{x^3}\right)-\frac{1}{9}\left(\frac{a}{x}+\frac{b}{x^3}\right)^2+\frac{5}{81}\left(\frac{a}{x}+\frac{b}{x^3}\right)^3+o\left(\frac{1}{x^3}\right)\right)-\left(1+\frac{1}{3}\frac{1}{x^3}+o\left(\frac{1}{x^3}\right)\right)\right)\\
&=\frac{a}{3}-\frac{a^2}{9x}+\left(\frac{b}{3}+\frac{5a^3}{81}-\frac{1}{3}\right)\frac{1}{x^2}+o\left(\frac{1}{x^2}\right)
\end{aligned}$$

Note : il n'est pas, à priori, évident de prévoir l'ordre auquel ce développement limité doit être mené ! Nous le menons à l'ordre 2 au cas où …

Du résultat obtenu, on tire : $\lim_{x\to+\infty}f(x)=\frac{a}{3}$.

On peut alors mener une première discussion.

1. Si $\frac{a}{3}<1$, c'est à dire $a<3$, on a $\lim_{x\to+\infty}\left(\left(f(x)\right)^x\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(\left(\frac{a}{3}\right)^x\right)=0$.
2. Si $\frac{a}{3}>1$, c'est à dire $a>3$, on a $\lim_{x\to+\infty}\left(\left(f(x)\right)^x\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(\left(\frac{a}{3}\right)^x\right)=+\infty$.
3. Si $a=3$, on a $\lim_{x\to+\infty} f(x)=1$ et nous sommes confrontés à une forme indéterminée du type « 1^∞ ».

   On considère alors :

$$\ln\left(\left(\sqrt[3]{x^3+ax^2+b}-\sqrt[3]{x^3+1}\right)^x\right)=x\ln\left(\sqrt[3]{x^3+ax^2+b}-\sqrt[3]{x^3+1}\right)$$
$$=x\ln\left(\frac{a}{3}-\frac{a^2}{9x}+\left(\frac{b}{3}+\frac{5a^3}{81}-\frac{1}{3}\right)\frac{1}{x^2}+o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right)$$

   Pour $a=3$, l'égalité se récrit :

$$\ln\left(\left(\sqrt[3]{x^3+3x^2+b}-\sqrt[3]{x^3+1}\right)^x\right)=x\ln\left(1-\frac{1}{x}+\frac{b+4}{3x^2}+o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right)$$

   Or, en $+\infty$ on a : $\ln\left(1-\frac{1}{x}+\frac{b+4}{3x^2}+o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right)=-\frac{1}{x}+o\left(\frac{1}{x}\right)$ et donc :

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\ln\left(\left(\sqrt[3]{x^3+3x^2+b}-\sqrt[3]{x^3+1}\right)^x\right)\right)=-1$$

   Soit, finalement :

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\left(\sqrt[3]{x^3+3x^2+b}-\sqrt[3]{x^3+1}\right)^x\right)=e^{-1}=\frac{1}{e}$$

Résultat final

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\left(\sqrt[3]{x^3+ax^2+b}-\sqrt[3]{x^3+1}\right)^x\right)\text{ est égale à :}$$

0 pour $0\le a<3$;

$\frac{1}{e}$ pour $a=3$

$+\infty$ pour $a>3$

Note : ces limites ne dépendent pas de la valeur de *b*.