

Déterminer :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\ln \left(\frac{\sin x}{x \sqrt[3]{\cos x}} \right)}{\ln \left(\cosh \left(\frac{x^2}{3} \right) \right)} \right)$$

Analyse

Comme on a $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin x}{x} \right) = 1$ et $\lim_{x \rightarrow 0} (\cos x) = \lim_{x \rightarrow 0} (\sqrt[3]{\cos x}) = 1$, il vient : $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin x}{x \sqrt[3]{\cos x}} \right) = 1$ et

$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\ln \left(\frac{\sin x}{x \sqrt[3]{\cos x}} \right) \right) = 0$. Par ailleurs, on a $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\cosh \left(\frac{x^2}{3} \right) \right) = \cosh(0) = 1$ et donc

$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\ln \left(\cosh \left(\frac{x^2}{3} \right) \right) \right) = 0$. Nous sommes donc confrontés à une forme indéterminée de type

« $\frac{0}{0}$ ». On la lève en déterminant des équivalents simples du numérateur et du dénominateur.

Résolution

Les équivalents vont être obtenus à partir de développements limités à l'origine des diverses fonctions présentes.

Il n'est pas évident, à priori, de déterminer l'ordre auxquels ces développements doivent être menés.

Le développement limité du sinus ne comporte que des puissances impaires de x . De fait, le développement limité de $\frac{\sin x}{x}$ ne comportera que des puissances paires. De même, le développement limité du cosinus ne comportant que des puissances paires de x , il en ira de même pour $\sqrt[3]{\cos x}$.

On est ainsi tenté de développer ces deux fonctions à l'ordre 2. Procédons donc ainsi.

On a : $\frac{\sin x}{x} = 1 - \frac{x^2}{6} + o(x^3)$ (puisque le terme suivant serait en « x^4 ») et :

$$\frac{1}{\sqrt[3]{\cos x}} = (\cos x)^{-\frac{1}{3}} = \left(1 - \frac{x^2}{2} + o(x^3) \right)^{-\frac{1}{3}} = 1 + \frac{x^2}{6} + o(x^3)$$

En effectuant alors le produit de ces deux développements limités, on constate rapidement que les termes en « x^2 » s'annulent ... La partie principale de ce développement limité n'est pas en « x^2 » mais en « x^4 » au moins.

Nous reprenons donc notre calcul avec, cette fois, des développements menés à l'ordre 4 :

$$\frac{\sin x}{x} = 1 - \frac{x^2}{6} + \frac{x^4}{120} + o(x^5)$$

et :

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt[3]{\cos x}} &= \left(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^5) \right)^{-\frac{1}{3}} \\ &= 1 - \frac{1}{3} \left(-\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^5) \right) + \frac{2}{9} \left(-\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^5) \right)^2 + o(x^5) \\ &= 1 + \frac{x^2}{6} + \left(-\frac{1}{3} \times \frac{1}{24} + \frac{2}{9} \times \frac{1}{4} \right) x^4 + o(x^5) \\ &= 1 + \frac{x^2}{6} + \frac{x^4}{24} + o(x^5) \end{aligned}$$

Le produit de ces développements limités s'écrit alors :

$$\begin{aligned} \left(1 - \frac{x^2}{6} + \frac{x^4}{120} + o(x^5) \right) \left(1 + \frac{x^2}{6} + \frac{x^4}{24} + o(x^5) \right) &= 1 + \left(\frac{1}{24} - \frac{1}{36} + \frac{1}{120} \right) x^4 + o(x^5) \\ &= 1 + \frac{x^4}{45} + o(x^5) \end{aligned}$$

Il vient donc :

$$\ln \left(\frac{\sin x}{x \sqrt[3]{\cos x}} \right) \sim \frac{x^4}{45}$$

Pour ce qui est du dénominateur, nous devons souligner que le développement limité du cosinus hyperbolique ne comporte que des puissances paires de x . Comme, de surcroît, l'argument est ici $\frac{x^2}{3}$, nous allons considérer le développement limité à l'ordre 2 du cosinus

hyperbolique qui fournira un développement limité à l'ordre 4 de $\cosh \left(\frac{x^2}{3} \right)$.

On a : $\cosh x = 1 + \frac{x^2}{2} + o(x^3)$ et donc : $\cosh \left(\frac{x^2}{3} \right) = 1 + \frac{x^4}{18} + o(x^7)$ (puisque le terme suivant serait en « x^8 »). On a donc :

$$\ln \left(\cosh \left(\frac{x^2}{3} \right) \right) \sim \frac{x^4}{18}$$

A partir des deux équivalences obtenues, on obtient :

$$\frac{\ln\left(\frac{\sin x}{x^3\sqrt{\cos x}}\right)}{\ln\left(\cosh\left(\frac{x^2}{3}\right)\right)} \sim \frac{\frac{x^4}{45}}{\frac{x^4}{18}} = \frac{18}{45} = \frac{2}{5}$$

Soit, finalement :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\ln\left(\frac{\sin x}{x^3\sqrt{\cos x}}\right)}{\ln\left(\cosh\left(\frac{x^2}{3}\right)\right)} \right) = \frac{2}{5}$$

Résultat final

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\ln\left(\frac{\sin x}{x^3\sqrt{\cos x}}\right)}{\ln\left(\cosh\left(\frac{x^2}{3}\right)\right)} \right) = \frac{2}{5}$$