Déterminer :

$$\lim_{x\to+\infty}\left(x\left(\sqrt[3]{x^3+x}-\sqrt[3]{x^3-x}\right)\right)$$

Analyse

On a : $\lim_{x\to+\infty}\sqrt[3]{x^3+x}=\lim_{x\to+\infty}\sqrt[3]{x^3-x}=\lim_{x\to+\infty}x=+\infty$. Nous sommes donc confrontés à une indétermination du type « $\infty-\infty$ » au niveau de la différence $\sqrt[3]{x^3+x}-\sqrt[3]{x^3-x}$. Elle peut être levée en recherchant un développement limité en $+\infty$.

Résolution

Considérons les fonctions $f_+(x)=\sqrt[3]{x^3+x}$ et $f_-(x)=\sqrt[3]{x^3-x}$. Nous allons travailler avec une seule expression : $\sqrt[3]{x^3+\varepsilon x}$, ε pouvant prendre les valeurs $+1$ ou -1.

On a : $\sqrt[3]{x^3+\varepsilon x}=\left(x^3+\varepsilon x\right)^{\frac{1}{3}}=\left(x^3\left(1+\frac{\varepsilon}{x^2}\right)\right)^{\frac{1}{3}}=x\left(1+\frac{\varepsilon}{x^2}\right)^{\frac{1}{3}}$

Au voisinage de $+\infty$, $\frac{1}{x^2}$ est un infiniment petit et nous pouvons donc utiliser le développement « standard » à l'origine :

$$(1+x)^m=1+mx+\frac{m(m-1)}{2}x^2+\frac{m(m-1)(m-2)}{3!}+...+\frac{m(m-1)(m-2)...(m-n+1)}{n!}x^n+\mathrm{o}\left(x^n\right)$$

Comme $\varepsilon^2=1$, les puissances paires apparaissant des las développements limités de $\left(1+\frac{1}{x^2}\right)^{\frac{1}{3}}$ et $\left(1-\frac{1}{x^2}\right)^{\frac{1}{3}}$ seront identiques. Elles disparaîtront donc lorsque nous formerons la différences des développements limités.

Nous effectuons donc simplement, puisque nous recherchons une limite, les développements limités à l'ordre 1 :

$$\left(1+\frac{1}{x^2}\right)^{\frac{1}{3}}=1+\frac{1}{3x^2}+o\left(\frac{1}{x^2}\right)\text{ et }\left(1-\frac{1}{x^2}\right)^{\frac{1}{3}}=1-\frac{1}{3x^2}+\mathrm{o}\left(\frac{1}{x^2}\right)$$

D'où :

$$f_+(x) - f_-(x) = x\left(\left(1+\frac{1}{x^2}\right)^{\frac{1}{3}} - \left(1-\frac{1}{x^2}\right)^{\frac{1}{3}}\right)$$

$$= x\left(\left(1+\frac{1}{3x^2}+\mathrm{o}\left(\frac{1}{x^2}\right)\right) - \left(1-\frac{1}{3x^2}+\mathrm{o}\left(\frac{1}{x^2}\right)\right)\right)$$

$$= x\left(\frac{2}{3x^2}+\mathrm{o}\left(\frac{1}{x^2}\right)\right)$$

$$= \frac{2}{3x}+\mathrm{o}\left(\frac{1}{x}\right)$$

On a donc :

$$x\left(\sqrt[3]{x^3+x} - \sqrt[3]{x^3-x}\right) = x\left(\frac{2}{3x}+\mathrm{o}(1)\right) = \frac{2}{3}+\mathrm{o}(1)$$

Soit, finalement :

$$\lim_{x\to+\infty}\left(x\left(\sqrt[3]{x^3+x} - \sqrt[3]{x^3-x}\right)\right) = \frac{2}{3}$$

Résultat final

$$\lim_{x\to+\infty}\left(x\left(\sqrt[3]{x^3+x} - \sqrt[3]{x^3-x}\right)\right) = \frac{2}{3}$$