Déterminer :

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}}\left(\frac{3\sqrt{x+4}-2\sqrt{x+9}}{x}\right)$$

Analyse

On a : $\lim_{x\to 0}\left(3\sqrt{x+4}-2\sqrt{x+9}\right)=3\sqrt{4}-2\sqrt{9}=(3\times 2)-(2\times 3)=0$. Nous sommes donc confrontés à une indétermination du type « $\frac{0}{0}$ ». Nous pouvons la lever en utilisant l'expression conjuguée de $3\sqrt{x+4}-2\sqrt{x+9}$ ou en ayant recours à des développements limités.

Résolution

1[ère] approche : utiliser une expression conjuguée

Soit la fonction *f* définie par : $f(x)=\frac{3\sqrt{x+4}-2\sqrt{x+9}}{x}$. L'ensemble de définition, D_f, de *f* est : $D_f=[-2\,;0[\cup]0\,;+\infty[$.

Pour *x* non nul, on a :

$$\begin{aligned}
f(x)&=\frac{3\sqrt{x+4}-2\sqrt{x+9}}{x}=\frac{\left(3\sqrt{x+4}-2\sqrt{x+9}\right)\left(3\sqrt{x+4}+2\sqrt{x+9}\right)}{x\left(3\sqrt{x+4}+2\sqrt{x+9}\right)}\\
&=\frac{\left(3\sqrt{x+4}\right)^2-\left(2\sqrt{x+9}\right)^2}{x\left(3\sqrt{x+4}+2\sqrt{x+9}\right)}=\frac{9(x+4)-4(x+9)}{x\left(3\sqrt{x+4}+2\sqrt{x+9}\right)}\\
&=\frac{5x}{x\left(3\sqrt{x+4}+2\sqrt{x+9}\right)}=\frac{5}{\left(3\sqrt{x+4}+2\sqrt{x+9}\right)}
\end{aligned}$$

Il vient alors :

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}} f(x)=\lim_{x\to 0}\left(\frac{5}{\left(3\sqrt{x+4}+2\sqrt{x+9}\right)}\right)=\frac{5}{3\sqrt{4}+2\sqrt{9}}=\frac{5}{(3\times 2)+(2\times 3)}=\frac{5}{12}$$

Finalement :

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}}\left(\frac{3\sqrt{x+4}-2\sqrt{x+9}}{x}\right)=\frac{5}{12}$$

f pourrait donc être prolongée par continuité en ce point en posant : $f(0)=\dfrac{5}{12}$.

2ème approche : utiliser des développements limités

On se place sur un voisinage de 0.

On a : $3\sqrt{x+4}=6\sqrt{1+\dfrac{x}{4}}=6\left(1+\dfrac{x}{4}\right)^{\frac{1}{2}}=6\left(1+\dfrac{x}{8}+\mathrm{o}(x)\right)=6+\dfrac{3x}{4}+\mathrm{o}(x)$

et : $2\sqrt{x+9}=6\sqrt{1+\dfrac{x}{9}}=6\left(1+\dfrac{x}{9}\right)^{\frac{1}{2}}=6\left(1+\dfrac{x}{18}+\mathrm{o}(x)\right)=6+\dfrac{x}{3}+\mathrm{o}(x)$

D'où :

$$\begin{aligned}3\sqrt{x+4}-2\sqrt{x+9}&=\left(6+\frac{3x}{4}+\mathrm{o}(x)\right)-\left(6+\frac{x}{3}+\mathrm{o}(x)\right)\\&=\left(\frac{3}{4}-\frac{1}{3}\right)x+\mathrm{o}(x) \qquad =\\&=\frac{5x}{12}+\mathrm{o}(x)\end{aligned}$$

Il vient enfin : $\dfrac{3\sqrt{x+4}-2\sqrt{x+9}}{x}=\dfrac{5}{12}+\mathrm{o}(1)$

C'est à dire : $\displaystyle\lim_{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}}\left(\frac{3\sqrt{x+4}-2\sqrt{x+9}}{x}\right)=\frac{5}{12}$.

On a retrouvé le résultat obtenu précédemment.

Résultat final

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}}\left(\frac{3\sqrt{x+4}-2\sqrt{x+9}}{x}\right)=\frac{5}{12}$$