Déterminer :

$$\lim_{x \to +\infty} \left(x^2 - \ln x \right)$$

Analyse

Il convient ici de faire apparaître une expression dont la limite en $+\infty$ est classique. Pour cela, on peut noter que $\ln x$ et $\ln\left(x^2\right)$ diffèrent « peu » …

Résolution

Comme suggéré, nous cherchons à faire apparaître une limite connue.
On utilise : $\forall x > 0,\ \ln\left(x^2\right) = 2\ln x$.

Il vient alors :

$$x^2 - \ln x = x^2 - \frac{1}{2}\ln\left(x^2\right) = x^2\left(1 - \frac{1}{2}\frac{\ln\left(x^2\right)}{x^2}\right).$$

On connaît la limite classique : $\lim_{t \to +\infty}\left(\frac{\ln t}{t}\right) = 0$. Ici, en posant $x^2 = t$, on a :

$$\lim_{x \to +\infty}\left(\frac{\ln\left(x^2\right)}{x^2}\right) = \lim_{t \to +\infty}\left(\frac{\ln t}{t}\right) = 0$$

On en déduit donc :

$$\lim_{x \to +\infty}\left(1 - \frac{1}{2}\frac{\ln\left(x^2\right)}{x^2}\right) = 1 - 0 = 1.$$

Comme : $\lim_{x \to +\infty} x^2 = +\infty$, il vient finalement : $\lim_{x \to +\infty}\left(x^2 - \ln x\right) = \lim_{x \to +\infty}\left(x^2\left(1 - \frac{1}{2}\frac{\ln\left(x^2\right)}{x^2}\right)\right) = +\infty$

Résultat final

$$\lim_{x \to +\infty} \left(x^2 - \ln x \right) = +\infty$$