

Déterminer :

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \left( \ln(x^2) + (\ln(x))^2 \right)$$

---

## Analyse

La présence du terme  $\ln(x)$  fait que nous travaillons sur l'intervalle  $]0; +\infty[$ . Nous allons donc en fait déterminer  $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \left( \ln(x^2) + (\ln(x))^2 \right)$ . Comme on a  $\lim_{x \rightarrow 0} \left( \ln(x^2) \right) = -\infty$  et

$\lim_{x \rightarrow 0} \left( (\ln(x))^2 \right) = +\infty$ , nous sommes confrontés à une forme indéterminée de type «  $\infty - \infty$  ».

Pour autant, récrire la fonction en tenant compte d'une propriété élémentaire du logarithme népérien permet de la lever ...

---

## Résolution

On a, pour  $x > 0$  :  $\ln(x^2) = 2 \ln x$ .

Donc, pour  $x \neq 1$  :  $\ln(x^2) + (\ln(x))^2 = 2 \ln(x) + (\ln(x))^2 = (\ln(x))^2 \left( \frac{2}{\ln x} + 1 \right)$

Or :  $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \ln x = -\infty$ . Donc :  $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \left( \frac{2}{\ln x} + 1 \right) = 0 + 1 = 1$ .

Il vient donc :  $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \left( \ln(x^2) + (\ln(x))^2 \right) = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \left( \ln(x^2) \right) = +\infty$ .

---

## Résultat final

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \left( \ln(x^2) + (\ln(x))^2 \right) = +\infty$$