

Soit g la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par :

$$g(x) = \frac{-2}{x^3} e^{-x+2} + \frac{-x^2+4}{3x+1}$$

Déterminer les limites de g en 0 (à droite) et en $+\infty$.

Analyse

Par chacune des limites à déterminer, on travaille sur chaque terme de la fonction g .
L'exercice requiert de maîtriser la fonction exponentielle et le calcul des limites des fonctions rationnelles en $\pm\infty$.

Résolution

Limite en 0 à droite

On a : $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{1}{x^3} = +\infty$, d'où : $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{-2}{x^3} = -\infty$.

Par ailleurs, on a : $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} e^{-x+2} = e^{-0+2} = e^2$.

Comme $e^2 > 0$, on a finalement : $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{-2}{x^3} e^{-x+2} = -\infty$

On a également : $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{-x^2+4}{3x+1} = \frac{-0+4}{3 \times 0 + 1} = \frac{4}{1} = 4$

On en tire, finalement :

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} g(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \left(\frac{-2}{x^3} e^{-x+2} + \frac{-x^2+4}{3x+1} \right) = -\infty$$

Limite en $+\infty$

On a : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^3} = 0^+$, d'où : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-2}{x^3} = 0^-$.

Par ailleurs, on a : $\lim_{x \rightarrow +\infty} (-x + 2) = -\infty$ donc : $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x+2} = \lim_{X \rightarrow -\infty} e^X = 0^+$.

On en déduit : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-2}{x^3} e^{-x+2} = 0^-$

On a également : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-x^2 + 4}{3x + 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-x^2}{3x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-x}{3} = -\infty$

On en tire, finalement :

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{-2}{x^3} e^{-x+2} + \frac{-x^2 + 4}{3x + 1} \right) = -\infty}$$

Les deux limites obtenues sont infinies et de même signe.

Dans le premier cas, c'est la fonction $x \mapsto \frac{-2}{x^3} e^{-x+2}$ qui conduit à la limite infinie, tandis que

dans le second c'est la fonction rationnelle : $x \mapsto \frac{-x^2 + 4}{3x + 1}$.

Résultat final

La fonction g définie sur $]0; +\infty[$ admet $-\infty$ comme limite en 0 à droite et en $+\infty$.