Soit *f* la fonction définie par :

$$f(x)=\frac{\ln\left(x^2+1\right)}{\ln x}$$

1. Déterminer l'ensemble de définition $\mathcal{D}_f$ de la fonction *f* ;
2. Calculer les limites de *f* aux bornes de son ensemble de définition.

Analyse

Le numérateur ne pose pas de problème particulier. Pour ce qui est des limites, on doit s'intéresser, en $+\infty$, aux quantité conduisant à la forme indéterminée.

Résolution

1. Notons $\mathcal{D}_g$ l'ensemble de définition de la fonction *g*.

   Pour tout *x* réel, on a $x^2+1\geq 1>0$. $\ln\left(x^2+1\right)$ est donc défini pour tout *x* réel.

   En revanche, le dénominateur n'est défini que pour *x* strictement positif. Par ailleurs, il ne doit pas être nul. Or $\ln x=0 \Leftrightarrow x=1$. On doit donc exclure la valeur 1.
   D'où, finalement :

$$\boxed{\mathcal{D}_g=\mathbb{R}^{+*}\setminus\{1\}=]0\,;1[\cup]1\,;+\infty[}$$

2. Déterminons : $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x)$

   On a : $\lim\limits_{x\to 0}\ln\left(x^2+1\right)=\ln 1=0$ (la fonction $x\mapsto\ln\left(x^2+1\right)$ est continue en 0).

   Plus précisément, on a pour tout *x* réel $\ln\left(x^2+1\right)>0$ et donc : $\lim\limits_{x\to 0}\ln\left(x^2+1\right)=0^+$.

   Par ailleurs : $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\ln x=-\infty$.

   On en déduit : $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\frac{\ln\left(x^2+1\right)}{\ln x}=0^-$.

$$\boxed{\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x)=0^-}$$

Graphiquement, la courbe représentative de la fonction *f* admet l'origine comme point asymptote.

Déterminons : $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}} f\left(x\right)$

On a immédiatement $\lim\limits_{x\to 0}\ln\left(x^2+1\right)=\ln\left(1^2+1\right)=\ln 2$ (la fonction $x\mapsto \ln\left(x^2+1\right)$ est continue en 1).

Par ailleurs, la fonction logarithme népérien prend des valeurs strictement négatives sur l'intervalle $\left]0\,;1\right[$. On a donc : $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}}\ln x=0^-$.

En tenant compte de $\ln 2>0$, on déduit de ce qui précède : $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}} f\left(x\right)=-\infty$.

Graphiquement, la courbe représentative de la fonction *f* admet la droite d'équation $x=1$ comme asymptote verticale.

Pour $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}} f\left(x\right)$, on raisonne comme précédemment mais cette fois on a $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}}\ln x=0^+$.

Il vient alors : $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}} f\left(x\right)=+\infty$.

L'interprétation graphique de ce résultat est identique.

Déterminons enfin : $\lim\limits_{x\to +\infty} f\left(x\right)$

On a cette fois : $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(x^2+1\right)=\lim\limits_{x\to +\infty} x^2=+\infty$ et donc : $\lim\limits_{x\to +\infty}\ln\left(x^2+1\right)=+\infty$.

Par ailleurs : $\lim\limits_{x\to +\infty}\ln x=+\infty$.

On a donc affaire à une forme indéterminée du type « $\dfrac{\infty}{\infty}$ ».

Au numérateur, le terme x^2 l'emporte bien sûr sur le terme constant égal à 1.
On va donc factoriser comme suit :

$$\ln\left(x^2+1\right)=\ln\left[x^2\left(1+\frac{1}{x^2}\right)\right]=\ln x^2+\ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right)=2\ln x+\ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right)$$

D'où :

$$\begin{aligned} f\left(x\right)&=\frac{\ln\left(x^2+1\right)}{\ln x}=\frac{\ln\left[x^2\left(1+\frac{1}{x^2}\right)\right]}{\ln x}=\frac{\ln x^2+\ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}{\ln x}\\ &=\frac{2\ln x+\ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}{\ln x}=2+\frac{\ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}{\ln x}\end{aligned}$$

On a : $\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x^2}\right)=1$ et donc : $\lim_{x\to+\infty}\ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right)=\ln 1=0$.

Alors : $\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}{\ln x}=0$.

Finalement : $\lim_{x\to+\infty} f(x)=2+0=2$.

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} f(x)=2}$$

Graphiquement, la courbe représentative de la fonction *f* admet la droite d'équation $y=2$ comme asymptote horizontale.

Comme $\ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right)>0$ pour tout réel x non nul et $\ln x>0$ pour tout réel x strictement supérieur à 1, on a $\frac{\ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}{\ln x}>0$ et donc $f(x)=2+\frac{\ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}{\ln x}>2$: la courbe représentative de *f* est située au-dessus de l'asymptote horizontale.

A titre de complément, nous fournissons ci-dessous une représentation de *f* :