

Déterminer :

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\ln(\sin x) - \ln(\cos x)}{\sin x - \cos x}$$

## Analyse

Le type de forme indéterminée auquel on est confronté suggère de s'orienter vers un nombre dérivé. Pour autant, celui-ci est loin d'être immédiat ...

## Résolution

En tenant compte de  $\sin \frac{\pi}{4} = \cos \frac{\pi}{4}$ , on a facilement :

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} (\sin x - \cos x) = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} [\ln(\sin x) - \ln(\cos x)] = 0.$$

Nous avons donc affaire ici à une forme indéterminée du type «  $\frac{0}{0}$  ».

Travaillons sur l'ensemble  $]0; \frac{\pi}{2}[ \setminus \left\{ \frac{\pi}{4} \right\}$  sur lequel les fonctions sinus et cosinus prennent des valeurs strictement positives et ne prennent pas de valeur commune ( $\sin x = \cos x$  sur  $]0; \frac{\pi}{2}[$  si, et seulement si  $x = \frac{\pi}{4}$ ).

$$\text{On a : } \forall x \in ]0; \frac{\pi}{2}[ \setminus \left\{ \frac{\pi}{4} \right\}, \frac{\ln(\sin x) - \ln(\cos x)}{\sin x - \cos x} = \frac{\ln \frac{\sin x}{\cos x}}{\cos x \left( \frac{\sin x}{\cos x} - 1 \right)} = \frac{1}{\cos x} \frac{\ln \frac{\sin x}{\cos x} - \ln 1}{\frac{\sin x}{\cos x} - 1}.$$

$$\text{On a immédiatement : } \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos x} = \frac{1}{\cos \frac{\pi}{4}} = \frac{1}{\frac{1}{\sqrt{2}}} = \sqrt{2}.$$

Par ailleurs :

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\sin x}{\cos x} &= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \tan x = \tan \frac{\pi}{4} = 1 \\ \lim_{X \rightarrow 1} \frac{\ln X - \ln 1}{X - 1} &= \left( \frac{1}{X} \right) (1) = \frac{1}{1} = 1 \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} \text{composition} \\ \Rightarrow \end{array} \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\ln \frac{\sin x}{\cos x} - \ln 1}{\frac{\sin x}{\cos x} - 1} = 1$$

Finalemment (produit) :  $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos x} \frac{\ln \frac{\sin x}{\cos x} - \ln 1}{\frac{\sin x}{\cos x} - 1} = \sqrt{2} \times 1 = \sqrt{2} .$

---

## Résultat final

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\ln(\sin x) - \ln(\cos x)}{\sin x - \cos x} = \sqrt{2}$$