

Déterminer :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(\cos(ax))}{\ln(\cos(bx))}$$

où a et b sont deux réels différents de 0.

Analyse

Le résultat peut être obtenu de diverses façons. Après avoir déterminé le type de forme indéterminée auquel nous sommes confrontés, nous calculons la limite en utilisant deux limites classiques, connues des élèves de Terminales.

Résolution

Pour tous réels a et b , on a : $\lim_{x \rightarrow 0} \ln(\cos(ax)) = \lim_{x \rightarrow 0} \ln(\cos(bx)) = \ln(\cos(0)) = \ln(1) = 0$.

Nous avons donc affaire ici à une forme indéterminée du type « $\frac{0}{0}$ ».

Puisque les arguments du logarithme népérien tendent vers 1 lorsque x tend vers 0, on doit

penser à la limite classique : $\lim_{X \rightarrow 0} \frac{\ln(1+X)}{X} = 1$.

On écrit alors : $\cos(ax) = 1 - \sin^2\left(\frac{ax}{2}\right)$ et $\cos(bx) = 1 - \sin^2\left(\frac{bx}{2}\right)$.

D'où :

$$\frac{\ln(\cos(ax))}{\ln(\cos(bx))} = \frac{\ln\left(1 - \sin^2\left(\frac{ax}{2}\right)\right)}{\ln\left(1 - \sin^2\left(\frac{bx}{2}\right)\right)} = \frac{\ln\left(1 - \sin^2\left(\frac{ax}{2}\right)\right)}{\sin^2\left(\frac{ax}{2}\right)} \times \frac{\sin^2\left(\frac{bx}{2}\right)}{\ln\left(1 - \sin^2\left(\frac{bx}{2}\right)\right)} \times \frac{\sin^2\left(\frac{ax}{2}\right)}{\sin^2\left(\frac{bx}{2}\right)}$$

Par composition, on a facilement : $\lim_{x \rightarrow 0} \sin^2\left(\frac{ax}{2}\right) = \lim_{x \rightarrow 0} \sin^2\left(\frac{bx}{2}\right) = 0$ puis, toujours par

composition :
$$\frac{\ln\left(1 - \sin^2\left(\frac{ax}{2}\right)\right)}{\sin^2\left(\frac{ax}{2}\right)} = \frac{\ln\left(1 - \sin^2\left(\frac{bx}{2}\right)\right)}{\sin^2\left(\frac{bx}{2}\right)} = 1.$$

Il nous reste donc à déterminer : $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2\left(\frac{ax}{2}\right)}{\sin^2\left(\frac{bx}{2}\right)}$.

On a classiquement :

$$\frac{\sin^2\left(\frac{ax}{2}\right)}{\sin^2\left(\frac{bx}{2}\right)} = \left(\frac{\sin\left(\frac{ax}{2}\right)}{\sin\left(\frac{bx}{2}\right)}\right)^2 = \left(\frac{\sin\left(\frac{ax}{2}\right)}{\frac{ax}{2}} \times \frac{\frac{bx}{2}}{\sin\left(\frac{bx}{2}\right)} \times \frac{a}{b}\right)^2 = \left(\frac{\sin\left(\frac{ax}{2}\right)}{\frac{ax}{2}}\right)^2 \times \left(\frac{\frac{bx}{2}}{\sin\left(\frac{bx}{2}\right)}\right)^2 \times \frac{a^2}{b^2}$$

On a la limite classique : $\lim_{X \rightarrow 0} \frac{\sin X}{X} = 1$.

Il vient alors, par composition : $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin\left(\frac{ax}{2}\right)}{\frac{ax}{2}}\right)^2 = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\frac{bx}{2}}{\sin\left(\frac{bx}{2}\right)}\right)^2 = 1$.

D'où : $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2\left(\frac{ax}{2}\right)}{\sin^2\left(\frac{bx}{2}\right)} = \frac{a^2}{b^2}$.

On obtient finalement (produit) : $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(\cos(ax))}{\ln(\cos(bx))} = 1 \times 1 \times \frac{a^2}{b^2} = \frac{a^2}{b^2}$.

Résultat final

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(\cos(ax))}{\ln(\cos(bx))} = \frac{a^2}{b^2}$$