

Déterminer :

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \sin x^{\frac{1}{\ln x}}$$

Analyse

La présence du sinus ne doit pas perturber outre mesure ! On réécrit l'expression $\sin x^{\frac{1}{\ln x}}$ sous forme exponentielle et on fait apparaître un rapport dont la limite en 0 est classique ...

Résolution

Pour tout x réel de l'intervalle $\left]0; \frac{\pi}{2}\right]$, on a $\sin x > 0$ et $\sin x^{\frac{1}{\ln x}} = e^{\ln(\sin x) \times \frac{1}{\ln x}} = e^{\frac{\ln(\sin x)}{\ln x}}$.

On cherche alors à faire apparaître le rapport $\frac{\sin x}{x}$:

$$\sin x^{\frac{1}{\ln x}} = e^{\frac{\ln(\sin x)}{\ln x}} = e^{\frac{\ln(\sin x) - \ln x + \ln x}{\ln x}} = e^{\frac{\ln \frac{\sin x}{x} + \ln x}{\ln x}} = e^{\frac{\ln \frac{\sin x}{x}}{\ln x} + 1} = e \times e^{\frac{\ln \frac{\sin x}{x}}{\ln x}}$$

Comme $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$, on a, grâce à la continuité du logarithme népérien en 1 :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \ln \frac{\sin x}{x} = \ln 1 = 0.$$

Par ailleurs, on a classiquement : $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \ln x = -\infty$.

Ainsi (division) : $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{\ln \frac{\sin x}{x}}{\ln x} = 0$ puis, grâce à la continuité de l'exponentielle en 0 :

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} e^{\frac{\ln \frac{\sin x}{x}}{\ln x}} = e^0 = 1.$$

Finalement (produit) : $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \sin x^{\frac{1}{\ln x}} = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} e \times e^{\frac{\ln \frac{\sin x}{x}}{\ln x}} = e \times 1 = e$.

Résultat final

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \sin x^{\frac{1}{\ln x}} = e$$