Déterminer :

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\ln(1+x)}{\ln x}\right)^{x\ln x}$$

Analyse

Dans un premier temps, on peut procéder à une analyse de la situation. Cette analyse conduit à une forme indéterminée que l'on lève en considérant le logarithme népérien de l'expression dont on cherche la limite.

Résolution

On a, pour tout x réel strictement positif :

$$\frac{\ln(1+x)}{\ln x}=\frac{\ln\left[x\left(1+\frac{1}{x}\right)\right]}{\ln x}=\frac{\ln x+\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\ln x}=1+\frac{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\ln x}$$

Comme $\lim_{x\to+\infty}\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)=\ln 1=0$ (composition et continuité du logarithme népérien en 1) et $\lim_{x\to+\infty}\ln x=+\infty$, il vient (rapport) : $\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\ln x}=0$ et donc :

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(1+x)}{\ln x}=\lim_{x\to+\infty}\left[1+\frac{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\ln x}\right]=1$$

Par ailleurs, on a immédiatement, chaque facteur tendant vers $+\infty$ quand x tend vers $+\infty$: $\lim_{x\to+\infty}(x\ln x)=+\infty$.

Nous avons donc affaire à une forme indéterminée du type : « 1^{∞} ».

Pour tout x réel strictement positif, on pose : $\varphi(x)=\left(\frac{\ln(1+x)}{\ln x}\right)^{x\ln x}$ et :

$$\Phi(x)=\ln\left[\varphi(x)\right]=\ln\left[\left(\frac{\ln(1+x)}{\ln x}\right)^{x\ln x}\right]=x\ln x\times\ln\left(\frac{\ln(1+x)}{\ln x}\right)=x\ln x\times\ln\left[1+\frac{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\ln x}\right]$$

Comme $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\ln x}=0$, on a : $\ln\left[1+\frac{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\ln x}\right]\underset{+\infty}{\sim}\frac{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\ln x}$ et donc :

$$\Phi(x)=x\ln x\times\ln\left[1+\frac{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\ln x}\right]\underset{+\infty}{\sim}x\ln x\times\frac{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\ln x}=x\times\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)$$

Or, on a classiquement : $\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\underset{+\infty}{\sim}\frac{1}{x}$ et donc : $x\times\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\underset{+\infty}{\sim}x\times\frac{1}{x}=1$, c'est-à-dire :
$\lim\limits_{x\to+\infty}\Phi(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[x\times\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\right]=1$.

Comme $\varphi(x)=e^{\Phi(x)}$, on a finalement (composition et continuité de l'exponentielle en 1) :
$\lim\limits_{x\to+\infty}\varphi(x)=e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\Phi(x)}=e^1=e$.

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\ln(1+x)}{\ln x}\right)^{x\ln x}=e$$

Résultat final

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\ln(1+x)}{\ln x}\right)^{x\ln x}=e}$$