

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction périodique admettant une limite en $+\infty$.

Montrer que f est constante.

Analyse

Notons, dans un premier temps, que la limite est nécessairement finie puisque la fonction f est périodique (voir ci-dessous).

Si on suppose maintenant que la fonction f n'est pas constante, f va prendre au moins deux valeurs distinctes et leur écart est en contradiction avec le fait que la fonction admet une limite finie (à partir d'une certaine valeur de x , les images sont arbitrairement proches les unes des autres...).

Résolution

Dans ce qui suit, notons T une période de f .

Soit a un réel et $f(a)$ son image par f .

Si on avait $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$, il existerait un réel A tel que $x > A \Rightarrow f(x) > f(a)$.

Mais il existe un entier k tel que $a + kT > A$ et on devrait donc avoir $f(a + kT) > f(a)$. Or $f(a + kT) = f(a)$.

On a ainsi abouti à une contradiction.

On raisonnerait de façon similaire en supposant $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$.

En définitive, la limite de la fonction f est nécessairement finie.

Montrons maintenant par l'absurde que la fonction f est constante.

Supposons donc que f ne soit pas périodique.

Il existerait donc deux réels a et b tels que $f(a) \neq f(b)$.

Comme f est T -périodique, on a : $\forall k \in \mathbb{Z}, f(a + kT) = f(a)$ et $f(b + kT) = f(b)$.

Notons alors L la limite de f en $+\infty$ et posons $\varepsilon_0 = |f(b) - f(a)|$.

Il existe un réel A_0 tel que $x > A_0 \Rightarrow |f(x) - L| < \frac{\varepsilon_0}{2} = \frac{1}{2}|f(b) - f(a)|$.

On peut trouver deux entiers k_a et k_b tels que $a + k_a T > A_0$ et $b + k_b T > A_0$.

On, aura donc : $|f(a+k_a T) - L| < \frac{1}{2}|f(b) - f(a)|$ et $|f(b+k_b T) - L| < \frac{1}{2}|f(b) - f(a)|$, c'est-à-dire : $|f(a) - L| < \frac{1}{2}|f(b) - f(a)|$ et $|f(b) - L| < \frac{1}{2}|f(b) - f(a)|$.

On a alors :

$$\begin{aligned}|f(b) - f(a)| &= |(f(b) - L) + (L - f(a))| \\ &\leq |f(b) - L| + |L - f(a)| \\ &< \frac{1}{2}|f(b) - f(a)| + \frac{1}{2}|f(b) - f(a)| \\ &= |f(b) - f(a)|\end{aligned}$$

En définitive : $|f(b) - f(a)| < |f(b) - f(a)|$.

On a ainsi abouti à une contradiction.

La fonction f est donc constante.

Résultat final

Une fonction définie sur \mathbb{R} , périodique et admettant une limite en $+\infty$ est constante.