Soit a un réel et f_a la fonction définie par :

$$f_a(x)=\frac{\cos^4 a}{\cos^2 x}+\frac{\sin^4 a}{\sin^2 x}$$

1. Donner, suivant les valeurs du réel a, le domaine de définition de la fonction f_a.
2. Discuter, suivant les valeurs des réels a et m, le nombre de solutions de l'équation : $f_a(x)=m$.

Analyse

Des fonctions trigonométriques, des puissances paires … voilà de bons ingrédients pour combiner étude de fonction et théorème des valeurs intermédiaires. La premières question permet d'identifier deux cas particuliers dont l'étude, dans la deuxième question, facilite l'étude du cas général.

Résolution

Question 1.

On va distinguer deux premières situations particulières correspondant aux annulations respectives des numérateurs des deux fractions apparaissant dans l'expression de $f_a(x)$.

On a : $\cos^4 a=0 \Leftrightarrow \cos a=0 \Leftrightarrow a=\frac{\pi}{2}+k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$. Considérons alors le 1^er^ cas :

$\boxed{1^{\text{er}} \text{ cas : } a=\frac{\pi}{2}+k\pi,\ k\in\mathbb{Z}.}$

Il vient alors : $\sin a=\pm 1$ et donc : $\sin^4 a=1$ puis $f_a(x)=\frac{1}{\sin^2 x}$.

Dans ces conditions, $f_a(x)$ existe si, et seulement si : $\sin^2 x\neq 0$, soit $\sin x\neq 0$, soit encore $x\neq k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$.

Alors :

$$\boxed{\mathscr{D}_{f_a} = \mathbb{R} \setminus \{x \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}\} = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \left]k\pi\,;(k+1)\pi\right[}$$

On a ensuite : $\sin^4 a = 0 \Leftrightarrow \sin a = 0 \Leftrightarrow a = k\pi, k \in \mathbb{Z}$. Considérons alors le 2ème cas :

$\boxed{2^{\text{ème}} \text{ cas : } a = k\pi, k \in \mathbb{Z}.}$

Il vient alors : $\cos a = \pm 1$ et donc : $\cos^4 a = 1$ puis $f_a(x) = \dfrac{1}{\cos^2 x}$.
Dans ces conditions, $f_a(x)$ existe si, et seulement si : $\cos^2 x \neq 0$, soit $\cos x \neq 0$, soit encore $x \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$. Alors :

$$\boxed{\mathscr{D}_{f_a} = \mathbb{R} \setminus \left\{x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\} = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \left]\frac{\pi}{2} + k\pi\,;\frac{\pi}{2} + (k+1)\pi\right[}$$

Dans tous les autres cas, c'est-à-dire quand $a \neq k\dfrac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$, les deux fractions sont non nulles.

$\boxed{3^{\text{ème}} \text{ cas : } a \neq k\dfrac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}.}$

On a alors : $x \in \mathscr{D}_{f_a} \Leftrightarrow \cos x \neq 0 \text{ et } \sin x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq k\dfrac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$.

$$\boxed{\mathscr{D}_{f_a} = \mathbb{R} \setminus \left\{x \neq k\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}\right\} = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \left]k\frac{\pi}{2}\,;(k+1)\frac{\pi}{2}\right[}$$

Question 2.

$\boxed{1^{\text{er}} \text{ cas : } a = \dfrac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}.}$

On a vu que l'on avait : $f_a(x) = \dfrac{1}{\sin^2 x}$ et $\mathscr{D}_{f_a} = \mathbb{R} \setminus \{x \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}\} = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \left]k\pi\,;(k+1)\pi\right[$.
Pour tout x de $\mathscr{D}_{f_a}$, $-x$ est également dans $\mathscr{D}_{f_a}$ et il vient :

$$f_a(-x) = \frac{1}{\sin^2(-x)} = \frac{1}{\sin^2 x} = f_a(x)$$

La fonction f_a est donc paire.

Par ailleurs, pour tout x réel, on a :

$$\sin^2(x+\pi)=\frac{1}{2}\left[1-\cos 2(x+\pi)\right]=\frac{1}{2}\left[1-\cos(2x+2\pi)\right]=\frac{1}{2}\left[1-\cos(2x)\right]=\sin^2 x$$

Ainsi, la fonction $x\mapsto \sin^2 x$ est π-périodique et il en va de même pour la fonction f_a sur son domaine de définition.
En définitive, on peut étudier la fonction f_a sur l'intervalle $\left]0\,;\frac{\pi}{2}\right]$.

On a : $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\sin x=(\sin 0)^+=0^+$ et $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}}x^2=\left(0^2\right)^+=0^+$. D'où (composition) : $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\sin^2 x=0^+$.

Par ailleurs : $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\frac{1}{x}=+\infty$. D'où (composition) : $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\frac{1}{\sin^2 x}=+\infty$.
Finalement :

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f_a(x)=\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\frac{1}{\sin^2 x}=+\infty$$

On a aussi : $f_a\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{1}{\sin^2\frac{\pi}{2}}=\frac{1}{1}=1$.

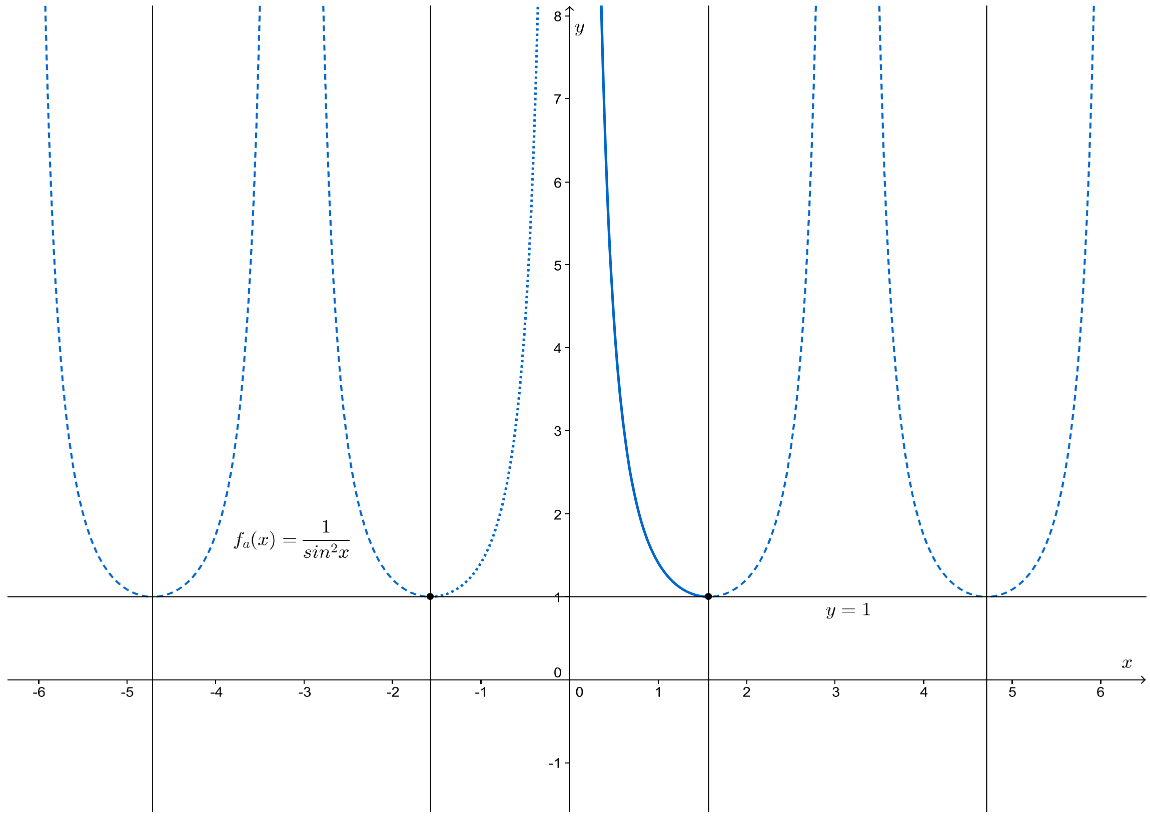
La fonction sinus est strictement croissante sur l'intervalle $\left]0\,;\frac{\pi}{2}\right]$ et définit une bijection de cet intervalle dans l'intervalle $]0\,;1]$. La fonction carrée est strictement croissante sur l'intervalle $]0\,;1]$ et définit une bijection de cet intervalle dans lui-même. La fonction inverse est strictement décroissante sur l'intervalle $]0\,;1]$ et définit une bijection de cet intervalle dans l'intervalle $[1\,;+\infty[$.
On en déduit finalement que la fonction f_a est strictement décroissante sur l'intervalle $\left]0\,;\frac{\pi}{2}\right]$ et définit une bijection de cet intervalle dans l'intervalle $[1\,;+\infty[$.

On a aussi :

$$f_a'(x)=\frac{-2\cos x}{\sin^3 x}$$

D'où, sur l'intervalle $\left]0\,;\frac{\pi}{2}\right]$: $f_a'(x)=0\Leftrightarrow -2\cos x=0\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{2}$.

A titre de complément, nous fournissons page suivante la courbe représentative de la fonction f_a sur l'intervalle $\left]0\,;\frac{\pi}{2}\right]$ (en bleu), puis sur l'ensemble $\left[-\frac{\pi}{2}\,;0\right[\cup\left]0\,;\frac{\pi}{2}\right]$ grâce à une symétrie axiale par rapport à l'axe des ordonnées (en pointillés) et enfin sur $\mathscr{D}_{f_a}$ (en tirets).



Pour compléter notre étude, nous allons montrer que la courbe représentative de la fonction f_a est symétrique par rapport à la droite d'équation $x = \frac{\pi}{2}$.

Soit donc un réel x dans $\mathscr{D}_{f_a}$ et soit $y = \pi - x$. On a :

$$\begin{aligned} f_a(y) &= f_a(\pi - x) \\ &= f_a(-x) && (\text{car } f_a \text{ est } \pi - \text{périodique}) \\ &= f_a(x) && (\text{car } f_a \text{ est paire}) \end{aligned}$$

En particulier, pour tout réel x de l'intervalle $]0\,;\pi[$, on a $y = \pi - x$ qui appartient à ce même intervalle et $f_a(y) = f_a(x)$.

En tenant compte de la périodicité de la fonction f_a, on en déduit que sur tout intervalle de la forme $]k\pi\,;(k+1)\pi[$:

- La fonction f_a est strictement décroissante sur l'intervalle $\left]k\pi\,;k\pi + \frac{\pi}{2}\right]$ et prend ses valeurs dans l'intervalle $[1;+\infty[$.

- La fonction f_a est strictement croissante sur l'intervalle $\left[k\pi+\frac{\pi}{2}\,;(k+1)\pi\right[$ et prend ses valeurs dans l'intervalle $[1\,;+\infty[$.
- La courbe représentative de la fonction admet pour axe de symétrie la droite d'équation $x=k\pi+\frac{\pi}{2}$.

On a finalement :

- Si $m<1$, l'équation $f_a(x)=m$ n'admet pas de solution.
- Si $m=1$, l'équation $f_a(x)=m$ admet une infinité de solutions, ce sont les valeurs de *x* pour lesquelles la dérivée $f_a\,'$ s'annule. Il s'agit de l'ensemble : $\left\{\frac{\pi}{2}+k\pi,\,k\in\mathbb{Z}\right\}$.
- Si $m>1$, l'équation $f_a(x)=m$ admet une infinité de solutions. Elle admet exactement deux solutions α_k et β_k sur chaque intervalle $]k\pi\,;(k+1)\pi[$ et ces valeurs vérifient : $\alpha_k+\beta_k=\frac{\pi}{2}+k\pi$.

2$^{\text{ème}}$ cas : $a=k\pi,\,k\in\mathbb{Z}$.

Ce deuxième cas est similaire au premier et nous ne redonnons pas tous les détails de l'étude.

On a vu que l'on avait : $f_a(x)=\frac{1}{\cos^2 x}$ et
$\mathscr{D}_{f_a}=\mathbb{R}\setminus\left\{x\neq\frac{\pi}{2}+k\pi,\,k\in\mathbb{Z}\right\}=\bigcup_{k\in\mathbb{Z}}\left]\frac{\pi}{2}+k\pi\,;\frac{\pi}{2}+(k+1)\pi\right[$.
Pour tout *x* de $\mathscr{D}_{f_a}$, $-x$ est également dans $\mathscr{D}_{f_a}$ et il vient :

$$f_a(-x)=\frac{1}{\cos^2(-x)}=\frac{1}{\cos^2 x}=f_a(x)$$

La fonction f_a est donc paire.
Par ailleurs, pour tout *x* réel, on a :

$$\cos^2(x+\pi)=\frac{1}{2}\left[1+\cos 2(x+\pi)\right]=\frac{1}{2}\left[1+\cos(2x+2\pi)\right]=\frac{1}{2}\left[1+\cos(2x)\right]=\cos^2 x$$

Ainsi, la fonction $x\mapsto\cos^2 x$ est π-périodique et il en va de même pour la fonction f_a sur son domaine de définition.

En définitive, on peut étudier la fonction f_a sur l'intervalle $\left[0\,;\frac{\pi}{2}\right[$.

On a : $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}, x<\frac{\pi}{2}} \cos x = \left(\cos\frac{\pi}{2}\right)^+ = 0^+$ et $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} x^2 = \left(0^2\right)^+ = 0^+$. D'où (composition) : $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}, x<\frac{\pi}{2}} \cos^2 x = 0^+$.

Par ailleurs : $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{1}{x} = +\infty$. D'où (composition) : $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}, x<\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\cos^2 x} = +\infty$.

Finalement :

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}, x<\frac{\pi}{2}} f_a(x) = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}, x<\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\cos^2 x} = +\infty$$

On a aussi : $f_a(0) = \frac{1}{\cos^2 0} = \frac{1}{1} = 1$.

La fonction cosinus est strictement décroissante sur l'intervalle $\left[0\,;\frac{\pi}{2}\right[$ et définit une bijection de cet intervalle dans l'intervalle $\left]0\,;1\right]$. La fonction carrée est strictement croissante sur l'intervalle $\left]0\,;1\right]$ et définit une bijection de cet intervalle dans lui-même. La fonction inverse est strictement décroissante sur l'intervalle $\left]0\,;1\right]$ et définit une bijection de cet intervalle dans l'intervalle $\left[1\,;+\infty\right[$.

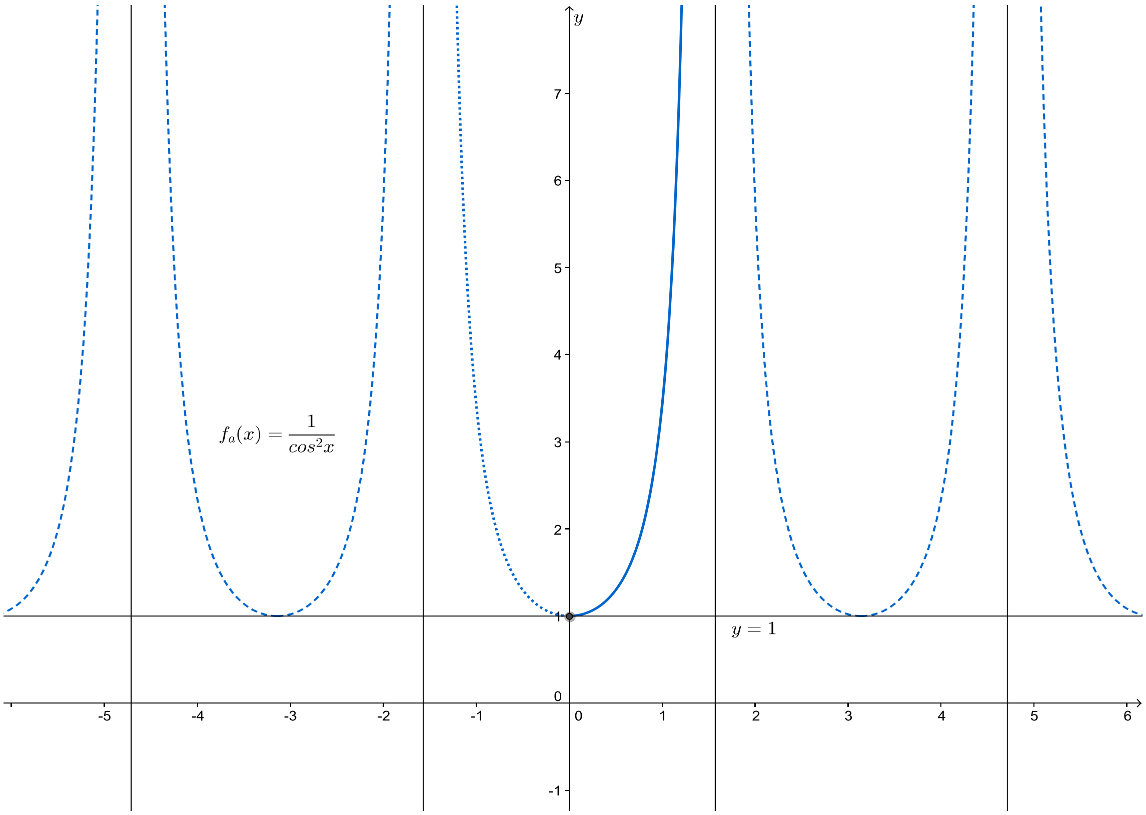
On en déduit finalement que la fonction f_a est strictement croissante sur l'intervalle $\left[0\,;\frac{\pi}{2}\right[$ et définit une bijection de cet intervalle dans l'intervalle $\left[1\,;+\infty\right[$.

On a aussi :

$$f_a'(x) = \frac{2\sin x}{\cos^3 x}$$

D'où, sur l'intervalle $\left[0\,;\frac{\pi}{2}\right[$: $f_a'(x) = 0 \Leftrightarrow 2\sin x = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

A titre de complément, nous fournissons page suivante la courbe représentative de la fonction f_a sur l'intervalle $\left[0\,;\frac{\pi}{2}\right[$ (en bleu), puis sur l'ensemble $\left]-\frac{\pi}{2}\,;\frac{\pi}{2}\right[$ grâce à une symétrie axiale par rapport à l'axe des ordonnées (en pointillés) et enfin sur $\mathscr{D}_{f_a}$ (en tirets).



On a alors :

- Si $m < 1$, l'équation $f_a(x) = m$ n'admet pas de solution.
- Si $m = 1$, l'équation $f_a(x) = m$ admet une infinité de solutions, ce sont les valeurs de x pour lesquelles la dérivée f_a' s'annule. Il s'agit de l'ensemble : $\{k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$.
- Si $m > 1$, l'équation $f_a(x) = m$ admet une infinité de solutions. Elle admet exactement deux solutions α_k et β_k sur chaque intervalle $\left]\frac{\pi}{2} + k\pi \,;\, \frac{\pi}{2} + (k+1)\pi\right[$ et ces valeurs vérifient : $\alpha_k + \beta_k = (k+1)\pi$.

3ème cas : $a \neq k\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$.

On a : $f_a(x) = \frac{\cos^4 a}{\cos^2 x} + \frac{\sin^4 a}{\sin^2 x}$ et $\mathscr{D}_{f_a} = \mathbb{R} \setminus \left\{x \neq k\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}\right\} = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left]k\frac{\pi}{2} \,;\, (k+1)\frac{\pi}{2}\right[$.

Les démarches précédentes relatives à la parité et à la périodicité restent valables pour chacun des deux termes apparaissant dans l'expression de $f_a(x)$. La fonction f_a est paire et π-périodique.

On étudie la fonction f_a sur l'intervalle $\left]0\,;\frac{\pi}{2}\right[$.

D'après ce qui a été vu dans les deux cas précédents, on a immédiatement :

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f_a(x) = \lim_{x\to\frac{\pi}{2},\, x<\frac{\pi}{2}} f_a(x) = +\infty$$

Par ailleurs, pour tout réel x de l'intervalle $\left]0\,;\frac{\pi}{2}\right[$, on a :

$$\begin{aligned} f_a'(x) &= \frac{2\sin x\cos^4 a}{\cos^3 x} + \frac{-2\cos x\sin^4 a}{\sin^3 x} \\ &= \frac{2}{\sin^3 x\cos^3 x}\left(\sin^4 x\cos^4 a - \cos^4 x\sin^4 a\right) \\ &= \frac{2}{\sin^3 x\cos^3 x}\left(\sin^2 x\cos^2 a - \cos^2 x\sin^2 a\right)\left(\sin^2 x\cos^2 a + \cos^2 x\sin^2 a\right) \end{aligned}$$

Comme $\cos a \neq 0$, $\sin a \neq 0$, $\cos x > 0$ et $\sin x > 0$, le rapport $\dfrac{2\left(\sin^2 x\cos^2 a + \cos^2 x\sin^2 a\right)}{\sin^3 x\cos^3 x}$ ne peut s'annuler sur l'intervalle $\left]0\,;\frac{\pi}{2}\right[$.

On a donc :

$$f_a'(x) = 0 \Leftrightarrow \sin^2 x\cos^2 a - \cos^2 x\sin^2 a = 0 \Leftrightarrow \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{\sin^2 a}{\cos^2 a} \Leftrightarrow \tan^2 x = \tan^2 a$$

Or, on a : $\tan^2 x = \tan^2 a \Leftrightarrow (\tan x - \tan a)(\tan x + \tan a) \Leftrightarrow \tan x = \tan a$ ou $\tan x = -\tan a$.
Nous distinguons les deux situations.

$\tan x = \tan a$

On a alors : $x = a + n\pi$. Comme on travaille dans l'intervalle $\left]0\,;\frac{\pi}{2}\right[$, on cherche l'entier n tel que :

$$0 < a + n\pi < \frac{\pi}{2}$$

En posant : $a = \alpha\pi$ (où α n'est pas de la forme $\frac{m}{2}$ avec m entier), cette inéquation devient :

$0 < \alpha\pi + n\pi < \frac{\pi}{2}$, soit : $0 < \alpha + n < \frac{1}{2}$, soit encore :

$$-\alpha < n < -\alpha + \frac{1}{2}$$

Finalement, on cherche un entier n tel que : $\alpha - \frac{1}{2} < -n < \alpha$.

Notons que l'on cherche un entier dans un intervalle ouvert de longueur $\frac{1}{2}$. Un tel entier peut donc ne pas exister !

$\tan x = \tan a$

On a alors : $x = \pi - a + n\pi$. Comme on travaille dans l'intervalle $\left]0\,;\frac{\pi}{2}\right[$, on cherche l'entier n tel que :

$$0 < \pi - a + n\pi < \frac{\pi}{2}$$

Posant à nouveau : $a = \alpha\pi$, cette inéquation devient : $0 < \pi - \alpha\pi + n\pi < \frac{\pi}{2}$, soit : $0 < 1 - \alpha + n < \frac{1}{2}$, soit encore :

$$\alpha - 1 < n < \alpha - \frac{1}{2}$$

Finalement, on cherche un entier n tel que : $\boxed{\alpha - 1 < n < \alpha - \frac{1}{2}}$.

Comme précédemment, notons que l'on cherche un entier dans un intervalle ouvert de longueur $\frac{1}{2}$.
Un tel entier peut donc ne pas exister ! En revanche, comme on considère les intervalles $\left]\alpha - 1\,;\alpha - \frac{1}{2}\right[$ et $\left]\alpha - \frac{1}{2}\,;\alpha\right[$ et comme $\alpha - \frac{1}{2}$ n'est pas un entier, la partie entière de α appartient à l'un de ces deux intervalles et c'est le seul entier s'y trouvant !
En définitive, l'équation $\tan^2 x = \tan^2 a$ admet une solution unique λ_0 sur l'intervalle $\left]0\,;\frac{\pi}{2}\right[$

(remarque : la monotonie stricte et la continuité de la fonction $x \mapsto \tan^2 x - \tan^2 a$ sur cet intervalle permet de conclure plus rapidement mais la démarche précédente permet de préciser davantage les choses …).

En tenant compte de $\tan^2 \lambda_0 = \tan^2 a$, on a : $\cos \lambda_0 = \pm \cos a$ et $\sin \lambda_0 = \pm \sin a$. Il vient alors :

$$f_a(\lambda_0) = \frac{\cos^4 a}{\cos^2 a} + \frac{\sin^4 a}{\sin^2 a} = \cos^2 a + \sin^2 a = 1$$

On a enfin :

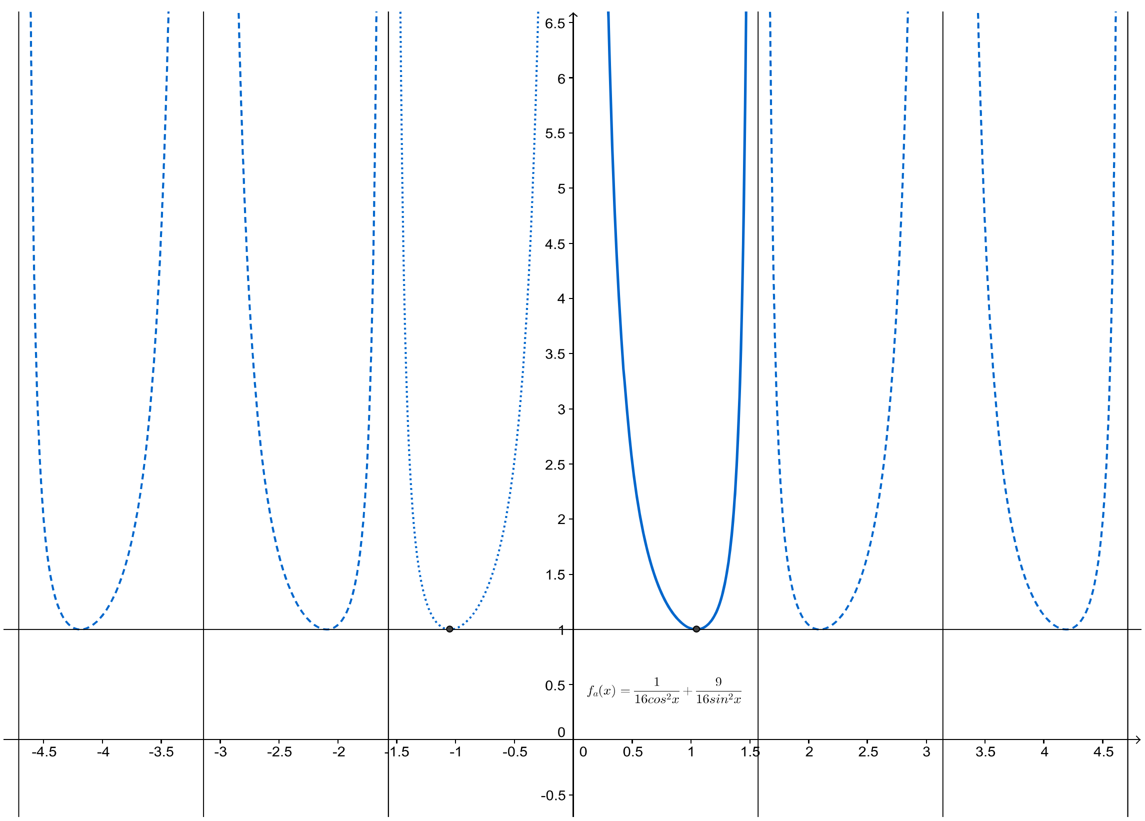
$$\begin{aligned} f_a'(x) &= \frac{2}{\sin^3 x \cos^3 x}\left(\sin^2 x \cos^2 a - \cos^2 x \sin^2 a\right)\left(\sin^2 x \cos^2 a + \cos^2 x \sin^2 a\right) \\ &= \frac{2\cos^2 x \cos^2 a}{\sin^3 x \cos^3 x}\left(\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} - \frac{\sin^2 a}{\cos^2 a}\right)\left(\sin^2 x \cos^2 a + \cos^2 x \sin^2 a\right) \\ &= \frac{2\cos^2 a}{\sin^3 x \cos x}\left(\tan^2 x - \tan^2 a\right)\left(\sin^2 x \cos^2 a + \cos^2 x \sin^2 a\right) \end{aligned}$$

Le signe de $f_a'(x)$ est donc celui de la différence $\tan^2 x - \tan^2 a$.

Sur l'intervalle $\left]0\,;\frac{\pi}{2}\right[$, la fonction tangente est strictement croissante et prend des valeurs strictement positive. La fonction carrée étant strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$, on en déduit immédiatement que la fonction $x \mapsto \tan^2 x - \tan^2 a$ est strictement croissante sur l'intervalle $\left]0\,;\frac{\pi}{2}\right[$. D'où le signe de $f_a'(x)$ puis les variations de la fonction f_a' :

- Si $x \in \left]0\,;\lambda_0\right]$, on a $f_a'(x) \leq 0$ et la fonction f_a' est strictement décroissante.
- Si $x \in \left[\lambda_0\,;\frac{\pi}{2}\right[$, on a $f_a'(x) \geq 0$ et la fonction f_a' est strictement croissante.

A titre de complément, nous fournissons page suivante la courbe représentative de la fonction f_a pour $a = \frac{\pi}{3}$ sur l'intervalle $\left[0\,;\frac{\pi}{2}\right[$ (en bleu), puis sur l'ensemble $\left]-\frac{\pi}{2}\,;\frac{\pi}{2}\right[$ grâce à une symétrie axiale par rapport à l'axe des ordonnées (en pointillés) et enfin sur $\mathscr{D}_{f_a}$ (en tirets).



On a alors :

- Si $m<1$, l'équation $f_a(x)=m$ n'admet pas de solution.
- Si $m=1$, l'équation $f_a(x)=m$ admet une infinité de solutions, ce sont les valeurs de *x* pour lesquelles la dérivée $f_a{}'$ s'annule. Il s'agit de l'ensemble : $\{\lambda_0+k\pi, k\in\mathbb{Z}\}\cup\{-\lambda_0+k\pi, k\in\mathbb{Z}\}$.
- Si $m>1$, l'équation $f_a(x)=m$ admet une infinité de solutions. Elle admet exactement deux solutions α_k et β_k sur chaque intervalle $\left]k\frac{\pi}{2};(k+1)\frac{\pi}{2}\right[$.