Déterminer, suivant la valeur du réel $k$, le nombre de solutions de l'équation :

$$\frac{x^2 \ln x}{x^2+1} = k$$

## Analyse

Une application classique du théorème de bijection. On procède classiquement par étape, l'étude du signe de la dérivée de la fonction $x \mapsto \frac{x^2 \ln x}{x^2+1}$ nécessitant l'étude des variations d'une fonction auxiliaire.

## Résolution

Introduisons la fonction $f$ définie par : $f(x) = \frac{x^2 \ln x}{x^2+1}$.
Du fait de la présence du logarithme népérien et comme le dénominateur ne s'annule pas, on a immédiatement : $\mathscr{D}_f = \mathbb{R}_+^*$.

On a : $f(x) = \frac{x^2 \ln x}{x^2+1} = \frac{x}{x^2+1} \times x \ln x$.
Comme $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} \frac{x}{x^2+1} = \frac{0}{0^2+1} = 0$ et $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} x \ln x = 0$ (croissance comparée), il vient : $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} f(x) = 0$.

On a par ailleurs : $f(x) = \frac{x^2 \ln x}{x^2+1} = \frac{x^2}{x^2+1} \times \ln x$.
Comme $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x^2}{x^2+1} = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x^2}{x^2} = 1$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln x = +\infty$, il vient (produit) : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.

La fonction $f$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ comme produit de deux fonctions dérivables sur cet intervalle (la fonction rationnelle $x \mapsto \frac{x^2}{x^2+1}$ et la fonction logarithme népérien). Pour tout $x$ réel strictement positif, on a alors :

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{\left(2x\ln x + x^2 \times \frac{1}{x}\right)\left(x^2+1\right) - x^2\ln x \times 2x}{\left(x^2+1\right)^2} \\
&= \frac{\cancel{2x^3\ln x} + 2x\ln x + x^3 + x \cancel{-2x^3\ln x}}{\left(x^2+1\right)^2} \\
&= \frac{x\left(2\ln x + x^2+1\right)}{\left(x^2+1\right)^2}
\end{aligned}
$$

Comme nous travaillons sur $\mathbb{R}_+^*$, le signe de $f'(x)$ est donné par $2\ln x + x^2+1$.
Posons alors $g(x) = 2\ln x + x^2 + 1$ sur $\mathbb{R}_+^*$.
Comme $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \ln x = -\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \left(x^2+1\right) = 0^2+1 = 1$, on a $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} g(x) = -\infty$.
Comme $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln x = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(x^2+1\right) = \lim\limits_{x\to+\infty} x^2 = +\infty$, on a : $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$.

Par ailleurs, la fonction g est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ comme somme de deux fonctions dérivables sur cet intervalle : au facteur 2 près, la fonction logarithme népérien et la fonction polynôme : $x \mapsto x^2+1$.
Pour tout réel *x* strictement positif, on a : $g'(x) = \frac{2}{x} + 2x = 2\frac{x^2+1}{x}$.
On a immédiatement $x > 0 \Rightarrow 2\frac{x^2+1}{x} > 0$. La fonction g est donc strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$.

La fonction *g* est continue (car dérivable) sur $\mathbb{R}_+^*$, strictement croissante sur cet intervalle et vérifie $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} g(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$. Elle définit donc une bijection de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}$. Il existe donc un unique réel $\alpha$ strictement positif tel que $g(\alpha) = 0$ soit $2\ln\alpha + \alpha^2 + 1 = 0$.
On a alors :

- Pour tout réel x dans $]0\,;\alpha[$, $g(x) < 0$, soit $f'(x) < 0$ et la fonction *f* est strictement décroissante sur cet intervalle.
- $g(\alpha) = f'(\alpha) = 0$.
- Pour tout réel *x* strictement supérieur à $\alpha$, on a $g(x) > 0$, soit $f'(x) > 0$ et la fonction *f* est strictement croissante sur $]\alpha\,;+\infty[$.

La fonction *f* admet donc un minimum en $\alpha$.
On a : $f(\alpha) = \frac{\alpha^2\ln\alpha}{\alpha^2+1}$. Comme $2\ln\alpha + \alpha^2 + 1 = 0$, il vient $\ln\alpha = -\frac{\alpha^2+1}{2}$ puis :

$$
f(\alpha) = \frac{\alpha^2\ln\alpha}{\alpha^2+1} = \frac{\alpha^2}{\alpha^2+1} \times \left(-\frac{\alpha^2+1}{2}\right) = -\frac{\alpha^2}{2} < 0
$$

Ainsi, on a :

- Sur l'intervalle $\left]0\,;\alpha\right]$, la fonction *f* est strictement décroissante. Elle y est continue et définit une bijection de $\left]0\,;\alpha\right]$ dans $\left]\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x)\,;\, f(\alpha)\right] = \left]0\,;-\frac{\alpha^2}{2}\right]$.
- Sur l'intervalle $\left[\alpha\,;+\infty\right[$, la fonction *f* est strictement croissante. Elle y est continue et définit un bijection de $\left[\alpha\,;+\infty\right[$ dans $\left[f(\alpha)\,;\lim_{x\to+\infty} f(x)\right[ = \left[-\frac{\alpha^2}{2}\,;+\infty\right[$.

On en conclut finalement :

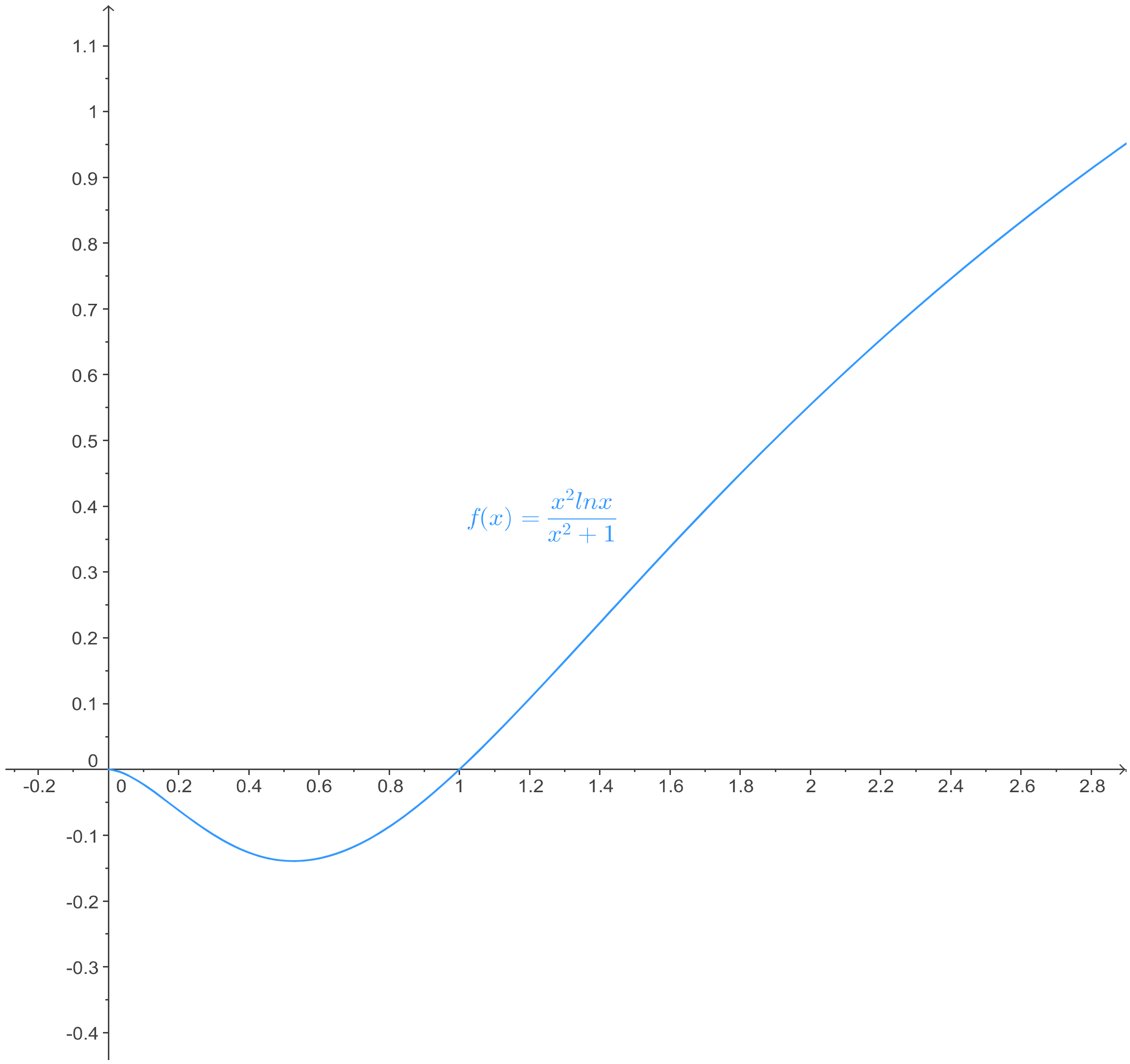
- Si $k < -\frac{\alpha^2}{2}$, l'équation $\frac{x^2 \ln x}{x^2+1} = k$ n'admet pas de solution.
- Si $k = -\frac{\alpha^2}{2}$, l'équation $\frac{x^2 \ln x}{x^2+1} = k$ admet une unique solution, le réel $\alpha$, unique solution de l'équation $2\ln x + x^2 + 1 = 0$.
- Si $-\frac{\alpha^2}{2} < k < 0$, l'équation $\frac{x^2 \ln x}{x^2+1} = k$ admet deux solutions, l'une dans l'intervalle $\left]0\,;\alpha\right[$, l'autre dans l'intervalle $\left]\alpha\,;+\infty\right[$.
- Si $k \geq 0$, l'équation $\frac{x^2 \ln x}{x^2+1} = k$ admet une unique solution dans l'intervalle $\left[1\,;+\infty\right[$ (car $f(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$).

## Résultat final

- Si $k < -\frac{\alpha^2}{2}$, l'équation $\frac{x^2 \ln x}{x^2+1} = k$ n'admet pas de solution.
- Si $k = -\frac{\alpha^2}{2}$ ou $k \geq 0$, l'équation $\frac{x^2 \ln x}{x^2+1} = k$ admet une unique solution.
- Si $-\frac{\alpha^2}{2} < k < 0$, l'équation $\frac{x^2 \ln x}{x^2+1} = k$ admet deux solutions.

## Complément

A titre de complément, nous fournissons page suivante la courbe représentative (en bleu) de la fonction *f*.


1.1
1
0.9
0.8
0.7
0.6
0.5
0.4
0.3
0.2
0.1
0
-0.1
-0.2
-0.3
-0.4
-0.2
0
0.2
0.4
0.6
0.8
1
1.2
1.4
1.6
1.8
2
2.2
2.4
2.6
2.8
$f(x) = \frac{x^2 ln x}{x^2+1}$