Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$, continue et décroissante sur $\mathbb{R}$.

Montrer qu'il existe un unique réel x vérifiant $f(x) = x$.

Analyse

Un exercice classique où le raisonnement par l'absurde occupe une place de choix !

Résolution

<u>Existence</u>

Posons : $\varphi(x) = f(x) - x$.
Raisonnons par l'absurde en supposant que la fonction φ ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$.
La fonction φ est continue sur $\mathbb{R}$ comme différence de deux fonctions continues sur cet intervalle.
Puisqu'elle ne s'annule pas, elle garde un signe constant.

Si on suppose : $\forall x \in \mathbb{R}, \varphi(x) > 0$, c'est-à-dire : $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) > x$, alors on a (par comparaison) :

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$$

Or une fonction décroissante ne peut tendre vers $+\infty$ en $+\infty$. On obtient ainsi une contradiction.

De façon similaire, si on suppose : $\forall x \in \mathbb{R}, \varphi(x) < 0$, c'est-à-dire : $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) < x$, alors on a (toujours par comparaison) :

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$$

Ici encore, on aboutit à une contradiction, une fonction décroissante ne pouvant tendre vers $-\infty$ en $-\infty$.

En définitive, il existe un réel x tel que $\varphi(x) = 0$, c'est-à-dire $f(x) = x$.

<u>Unicité</u>

Supposons qu'il existe deux réels distincts α et β vérifiant $f(x) = x$. On peut supposer, par exemple : $\alpha < \beta$, c'est-à-dire $f(\alpha) < f(\beta)$.

Comme la fonction f est décroissante sur $\mathbb{R}$, on a : $\alpha < \beta \Rightarrow f(\alpha) \geq f(\beta)$ qui est en contradiction avec $f(\alpha) < f(\beta)$.

Ainsi, la fonction *f* admet un unique point fixe.

Résultat final

Une fonction *f* définie, continue et décroissante sur $\mathbb{R}$ admet un unique point fixe.