Soit la fonction *f* définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f : x \mapsto \begin{cases} \dfrac{mx-1}{x^2+2} & \text{si } x \leq 2 \\ \dfrac{\sqrt{x^2-5x+10}-2}{2-x} & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

où *m* est un paramètre réel.

Pour quelle valeur de *m* la fonction *f* est-elle continue en 2 ?

Analyse

On revient à la définition de la continuité. La fonction *f* sera continue en 2 si, et seulement si, on a : $\lim_{\substack{x\to 2\\ x<2}} f(x) = \lim_{\substack{x\to 2\\ x>2}} f(x) = f(2)$. On note alors que la fonction *f*, à gauche de 2, est une fonction rationnelle … A droite de 2, une analyse nous permet d'identifier une forme indéterminée dont la levée fait appel à une « technique » classique.

Résolution

Sur l'intervalle $]-\infty\,;2]$, la fonction *f* est rationnelle. Elle y est donc continue et on a :

$$\lim_{\substack{x\to 2\\ x<2}} f(x) = f(2) = \frac{2m-1}{2^2+2} = \frac{2m-1}{6}$$

Intéressons-nous maintenant à $\lim_{\substack{x\to 2\\ x>2}} f(x)$.

La fonction $x \mapsto x^2-5x+10$ est une fonction polynôme. Elle est donc continue en 2 et on a donc : $\lim_{x\to 2}\left(x^2-5x+10\right) = 2^2-5\times 2+10 = 4-10+10 = 4$. La continuité en 4 de la fonction racine carrée nous permet alors d'écrire : $\lim_{X\to 4}\sqrt{X} = \sqrt{4} = 2$. On tire de ce qui précède : $\lim_{x\to 2}\sqrt{x^2-5x+10} = 2$ et enfin : $\lim_{x\to 2}\left(\sqrt{x^2-5x+10}-2\right) = 2-2 = 0$.

Comme $\lim_{x\to 2}(2-x) = 2-2 = 0$, nous avons donc affaire à une forme indéterminée du type « $\frac{0}{0}$ ».

La racine carrée au numérateur est « gênante ». Comme elle apparaît dans une somme, nous utilisons classiquement l'expression conjuguée. Pour tout réel x strictement supérieur à 2, on a :

$$\begin{aligned}
\frac{\sqrt{x^2-5x+10}-2}{2-x} &= \frac{\left(\sqrt{x^2-5x+10}-2\right)\left(\sqrt{x^2-5x+10}+2\right)}{(2-x)\left(\sqrt{x^2-5x+10}+2\right)} \\
&= \frac{\sqrt{x^2-5x+10}^2-2^2}{(2-x)\left(\sqrt{x^2-5x+10}+2\right)} \\
&= \frac{x^2-5x+10-4}{(2-x)\left(\sqrt{x^2-5x+10}+2\right)} \\
&= \frac{x^2-5x+6}{(2-x)\left(\sqrt{x^2-5x+10}+2\right)}
\end{aligned}$$

2 annule le numérateur et on obtient facilement l'autre racine : 3. Comme le coefficient de « x^2 » vaut 1, la factorisation est immédiate : $x^2-5x+6=(x-2)(x-3)$. Il vient alors :

$$\begin{aligned}
\frac{\sqrt{x^2-5x+10}-2}{2-x} &= \frac{x^2-5x+6}{(2-x)\left(\sqrt{x^2-5x+10}+2\right)} \\
&= \frac{(x-2)(x-3)}{(2-x)\left(\sqrt{x^2-5x+10}+2\right)} \\
&= -\frac{x-3}{\sqrt{x^2-5x+10}+2} \\
&= \frac{3-x}{\sqrt{x^2-5x+10}+2}
\end{aligned}$$

On a immédiatement : $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ x>2}}(3-x)=\lim\limits_{x\to 2}(3-x)=3-2=1$

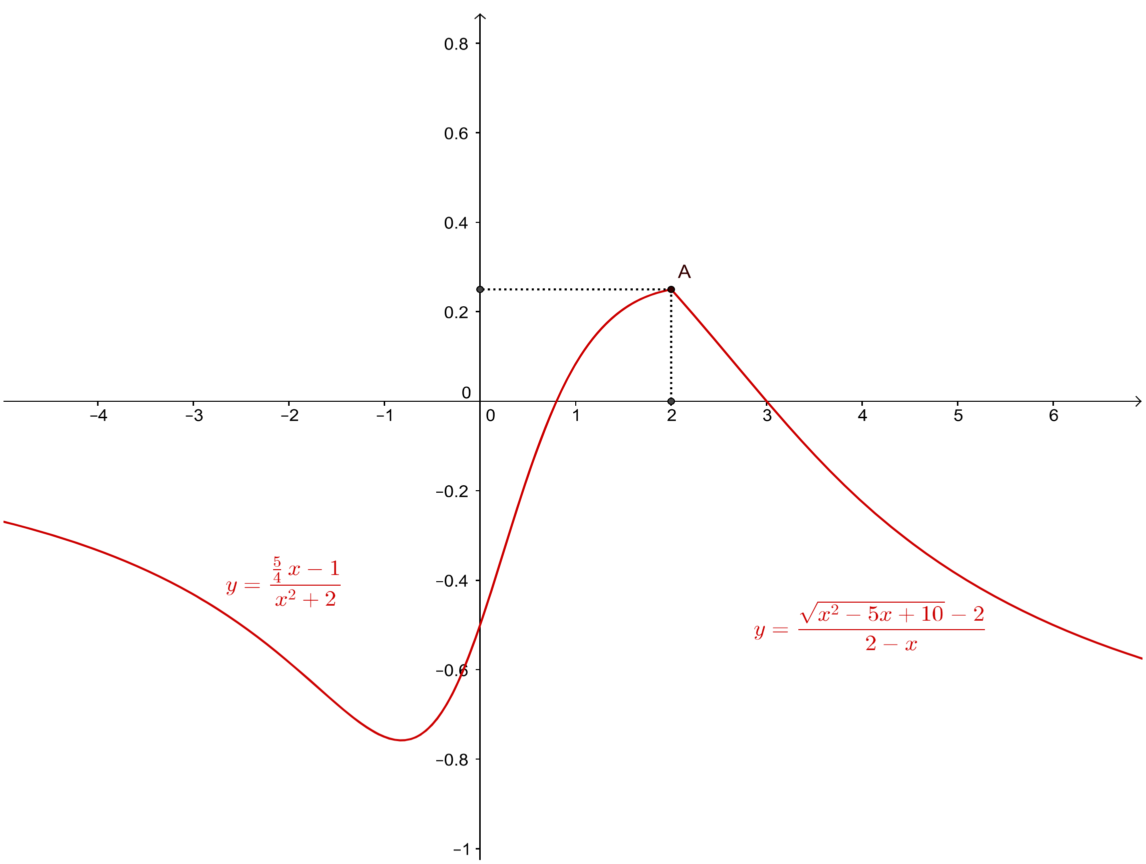
On a vu que l'on avait : $\lim\limits_{x\to 2}\sqrt{x^2-5x+10}=2$. Il vient donc : $\lim\limits_{x\to 2}\left(\sqrt{x^2-5x+10}+2\right)=2+2=4$.

Il vient donc (rapport) : $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ x>2}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ x>2}}\frac{3-x}{\sqrt{x^2-5x+10}+2}=\frac{1}{4}$.

On a alors :

$$\begin{aligned} & f \text{ continue en } 2 \\ \Leftrightarrow & \lim_{\substack{x\to 2\\ x<2}} f(x) = \lim_{\substack{x\to 2\\ x>2}} f(x) = f(2) \\ \Leftrightarrow & \frac{2m-1}{6} = \frac{1}{4} \\ \Leftrightarrow & 8m-4=6 \\ \Leftrightarrow & 8m=10 \\ \Leftrightarrow & m=\frac{10}{8} \\ \Leftrightarrow & m=\frac{5}{4} \end{aligned}$$

A titre de complément, nous fournissons ci-dessous une représentation graphique de la fonction f (en rouge) pour $m=\frac{5}{4}$.



Résultat final

La fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f : x \mapsto \begin{cases} \dfrac{mx-1}{x^2+2} & \text{si } x \leq 2 \\ \dfrac{\sqrt{x^2-5x+10}-2}{2-x} & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

est continue en 2 pour $m = \dfrac{5}{4}$.