

Soit une fonction f définie sur $[0;1]$, continue et telle que $f(0) = f(1)$.

Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \exists \alpha \in [0;1] / f\left(\alpha + \frac{1}{n}\right) = f(\alpha)$.

Indication : considérer $\left[f\left(\frac{1}{n}\right) - f(0) \right] + \left[f\left(\frac{2}{n}\right) - f\left(\frac{1}{n}\right) \right] + \dots$

Analyse

Dans un premier temps, on évalue la somme, simple, donnée dans l'indication. La valeur obtenue et le terme général de la somme doivent conduire à l'introduction d'une fonction auxiliaire qui permettra de conclure.

Résolution

Soit n un entier naturel non nul.

Comme suggéré dans l'énoncé, nous considérons la somme :

$$\begin{aligned} S_n &= \left[f\left(\frac{1}{n}\right) - f(0) \right] + \left[f\left(\frac{2}{n}\right) - f\left(\frac{1}{n}\right) \right] + \dots + \left[f\left(\frac{n-1}{n}\right) - f\left(\frac{n-2}{n}\right) \right] + \left[f(1) - f\left(\frac{n-1}{n}\right) \right] \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \left[f\left(\frac{k+1}{n}\right) - f\left(\frac{k}{n}\right) \right] \end{aligned}$$

La somme est télescopique et on a simplement : $S_n = f(1) - f(0) = 0$.

Si tous les termes de la somme sont nuls, alors on a par exemple

$$f\left(\frac{1}{n}\right) - f(0) = f\left(0 + \frac{1}{n}\right) - f(0) = 0 \text{ et on peut prendre } \alpha = 0.$$

Supposons maintenant que les termes de la somme ne soient pas tous nuls.
 Puisque $S_n = 0$, la somme comporte nécessairement deux termes non nuls de signes
 contraires. Il existe donc deux entiers distincts k_- et k_+ dans $\llbracket 0; n-1 \rrbracket$ tels que

$$f\left(\frac{k_-+1}{n}\right) - f\left(\frac{k_-}{n}\right) < 0 \text{ et } f\left(\frac{k_++1}{n}\right) - f\left(\frac{k_+}{n}\right) > 0.$$

On considère alors la fonction φ définie sur $I = \left[\frac{k_-}{n}; \frac{k_+}{n}\right]$ (si $k_- < k_+$) ou sur $I = \left[\frac{k_+}{n}; \frac{k_-}{n}\right]$

(si $k_+ < k_-$) par $\varphi : x \mapsto \varphi(x) = f\left(x + \frac{1}{n}\right) - f(x)$.

Comme $I \subset [0; 1]$ et comme f est continue sur $[0; 1]$, la fonction φ est continue sur I .

Par ailleurs, on a : $\varphi\left(\frac{k_-}{n}\right) = f\left(\frac{k_-+1}{n}\right) - f\left(\frac{k_-}{n}\right) < 0$ et $\varphi\left(\frac{k_+}{n}\right) = f\left(\frac{k_++1}{n}\right) - f\left(\frac{k_+}{n}\right) > 0$.

Le théorème des valeurs intermédiaires nous permet alors de conclure qu'il existe un réel α

dans I tel que $\varphi(\alpha) = 0 = f\left(\alpha + \frac{1}{n}\right) - f(\alpha)$.

Le résultat est établi.

Résultat final

Si une fonction f est définie et continue sur l'intervalle $[0; 1]$ et vérifie $f(0) = f(1)$ alors

Pour tout entier naturel n non nul, il existe un réel α tel que $f\left(\alpha + \frac{1}{n}\right) = f(\alpha)$.