

Pour tout entier naturel n , on définit la fonction f_n par :

$$f_n : \begin{cases} \left] 0; \frac{\pi}{2} \right] \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \frac{1}{x^n} - \sin x \end{cases}$$

1. Montrer que l'équation $f_n(x) = 0$ admet une unique solution sur l'intervalle $\left] 1; \frac{\pi}{2} \right]$. On note a_n cette solution.
En déduire le signe de f_n sur cet intervalle.
2. Montrer que la suite (a_n) est décroissante.
(on pourra s'intéresser à $f_{n+1}(a_n)$)
3. Montrer que la suite (a_n) converge et calculer sa limite.

Analyse

Un exercice assez classique mêlant fonctions et suites.

La question 1 permet de « construire » la suite tandis que la question 2 (plus délicate) permet d'obtenir un élément-clé nous permettant de conclure à la convergence de la suite.

Résolution

Question 1.

Soit n un entier naturel non nul.

La fonction f_n est continue sur $\left] 0; \frac{\pi}{2} \right]$ comme somme de deux fonctions ($x \mapsto \frac{1}{x^n}$ et $x \mapsto -\sin x$) continue sur cet intervalle.

La fonction $x \mapsto \frac{1}{x^n}$ est strictement décroissante sur \mathbb{R}_+^* et donc sur $\left[1; \frac{\pi}{2}\right]$. La fonction sinus est strictement croissante sur $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ et donc sur $\left[1; \frac{\pi}{2}\right]$. De fait, la fonction $x \mapsto -\sin x$ est strictement décroissante sur $\left[1; \frac{\pi}{2}\right]$.

Finalement, la fonction f_n est strictement décroissante sur $\left[1; \frac{\pi}{2}\right]$.

On a enfin : $f_n(1) = \frac{1}{1^n} - \sin 1 = 1 - \sin 1 > 0$ (car $0 < 1 < \frac{\pi}{2}$ et donc $0 < \sin 1 < 1$). Par ailleurs :

$f_n\left(\frac{\pi}{2}\right) = \left(\frac{1}{\frac{\pi}{2}}\right)^n - \sin \frac{\pi}{2} = \left(\frac{2}{\pi}\right)^n - 1$. Comme $0 < \frac{2}{\pi} < 1$, il vient, n étant un entier naturel non nul, $0 < \left(\frac{2}{\pi}\right)^n < 1$ et donc $\left(\frac{2}{\pi}\right)^n - 1 < 0$.

Le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires nous permet alors de conclure que l'équation $f_n(x) = 0$ admet une solution unique a_n sur l'intervalle $\left]1; \frac{\pi}{2}\right[$.

Pour $n = 0$, on a $f_0(x) = 1 - \sin x$ et l'équation $f_0(x) = 0$ équivaut à $\sin x = 1$ dont l'unique solution sur l'intervalle $\left]1; \frac{\pi}{2}\right[$ est $a_0 = \frac{\pi}{2}$.

Pour tout entier naturel n , l'équation $f_n(x) = 0$ admet une unique solution sur l'intervalle $\left]1; \frac{\pi}{2}\right[$.

La fonction f_0 est la fonction définie sur l'intervalle $\left]0; \frac{\pi}{2}\right[$ par $f_0(x) = 1 - \sin x$.

Pour tout réel x de l'intervalle $\left]1; \frac{\pi}{2}\right[$, on a $\sin x < 1$ et donc $f_0(x) < 0$.

Par ailleurs : $f_0\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$

Pour tout entier naturel n non nul, la fonction f_n est strictement décroissante sur l'intervalle $\left]1; \frac{\pi}{2}\right[$ et s'annule en une unique valeur $a_n \in \left]1; \frac{\pi}{2}\right[$.

Il vient donc :

- Pour tout réel x dans $[1; a_n[$, $f_n(x) > 0$.
- $f_n(a_n) = 0$.
- Pour tout réel x dans $]a_n; \frac{\pi}{2}]$, $f_n(x) < 0$.

$$\bullet \text{ Pour tout réel } x \text{ dans } \left[1; \frac{\pi}{2}\right[, f_0(x) < 0.$$

$$\bullet f_0\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0.$$

Pour tout entier naturel n non nul :

- Pour tout réel x dans $[1; a_n[$, $f_n(x) > 0$.
- $f_n(a_n) = 0$.
- Pour tout réel x dans $]a_n; \frac{\pi}{2}]$, $f_n(x) < 0$.

Question 2.

Comme l'énoncé le suggère, calculons $f_{n+1}(a_n)$.

$$\text{On a : } f_{n+1}(a_n) = \frac{1}{a_n^{n+1}} - \sin a_n = \frac{1}{a_n^{n+1}} - \frac{1}{a_n^n} + \underbrace{\frac{1}{a_n^n} - \sin a_n}_{=f_n(a_n)} = \frac{1}{a_n^{n+1}} - \frac{1}{a_n^n} + \underbrace{f_n(a_n)}_{=0} = \frac{1}{a_n^{n+1}} - \frac{1}{a_n^n}$$

On a $a_n \in \left]1; \frac{\pi}{2}\right]$ et donc $a_n > 1$ d'où : $a_n^{n+1} > a_n^n$ et, enfin : $\frac{1}{a_n^{n+1}} - \frac{1}{a_n^n} < 0$.

Ainsi, la suite (a_n) est strictement décroissante.

La suite (a_n) est strictement décroissante.

Question 3.

La suite (a_n) est strictement décroissante (la seule décroissance suffit) et minorée par 1. Elle est donc convergente.

La suite (a_n) est convergente.

Notons L la limite de la suite (a_n) .

On a $\forall n \in \mathbb{N}, 1 \leq a_n \leq \frac{\pi}{2}$ et donc (comparaison) : $1 \leq L \leq \frac{\pi}{2}$.

Supposons $L > 1$.

On a alors : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{a_n^n} = 0$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sin a_n = \sin L$

On a : $\forall n \in \mathbb{N}, \frac{1}{a_n^n} - \sin a_n = 0$. On en déduit alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{a_n^n} - \sin a_n \right) = 0$. Or, d'après ce qui

précède : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{a_n^n} - \sin a_n \right) = -\sin L \neq 0$, ce qui est absurde.

Finalement : $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 1$.

$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 1$

Complément

A titre de complément, nous fournissons ci-après quelques-unes des courbes représentatives des fonctions $x \mapsto \frac{1}{x^n}$ (pour $n = 0, 1, 2, 3$ et 20) ainsi que celle de la fonction sinus. Dans cet exercice, on s'est en fait intéressé à la suite des abscisses (a_n) des points d'intersections (A_n) de ces courbes avec celle de la fonction sinus. On a ainsi fait apparaître certains de ces points d'intersection et les abscisses correspondantes.

Remarque : pour une meilleure lisibilité, nous avons positionné l'intersection des axes au point de coordonnées $(0,8; 0,6)$.

